Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 4

Логическое следствие

Проблема общезначимости формул

Подстановки

Метод семантических таблиц
в логике предикатов

Корректность табличного вывода

Вступление

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний, несущих в себе “нетривиальную” (“полезную”) информацию

Общезначимые формулы — это банальности, тавтологии, знания, не несущие в себе никакой “полезной” информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

Логическое следствие

Пусть F — **множество предложений**, и φ — **предложение**

Тогда формула φ — логическое следствие множества F, если любая модель для множества F является моделью для φ, то есть если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Если F — изначально имеющиеся "базовые" знания, то φ — необходимо следующее из них "производное" знание

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей "разумной деятельности": экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, ..., ...

Логическое следствие

Пусть F — **множество предложений**, и φ — **предложение**

Запись $\mathsf{F} \models \varphi$ используется для обозначения того, что φ — **логическое следствие** множества F

А какие предложения являются логическими следствиями пустого множества формул?

Общезначимые: $\models \varphi$

А как устроены логические следствия непустых множеств предложений?

Логическое следствие

Пример

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом, но показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем переформулировать эту задачу на языке логики предикатов
Начнём с сигнатуры алфавита; в неё войдут:

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво**
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ “икс любит игрека”

Логическое следствие

Пример

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$
- Саша любит пиво: $\varphi_2 : \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:

$$\varphi_3 : \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$

$$\varphi_4 : \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x}))$$

- Любит ли кто-нибудь дашу?: $\varphi_0 : \exists x\ L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})$

Сама задача тогда записывается так:

проверить соотношение $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0$

И как же это проверить?

И причём здесь общезначимость формул?

Логическое следствие

Теорема о логическом следствии

Пусть $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ **— конечное множество предложений, и** φ **— предложение. Тогда**

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$):

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \mathsf{F}$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$, а значит,

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \mathsf{F}$

Так как $\mathsf{F} \models \varphi$, имеем: $\mathcal{I} \models \varphi$ — а значит, снова верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Итог: для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Но это и означает общезначимость формулы $\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Логическое следствие

Теорема о логическом следствии
Пусть $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ — конечное множество предложений, и φ — предложение. Тогда

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$):
Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества F:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$
По рассматриваемому случаю формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$
Это возможно только в том случае, если верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ для множества F является моделью для φ ▼

Проблема общезначимости формул

Общезначимые формулы — это способы преобразования знаний из одной формы в другую, учитывающие причинно-следственные связи, которые можно описать в терминах формул (*логики предикатов*)

Чтобы уметь извлекать новые знания (φ) из имеющихся ($\mathsf{F} = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$), нужно понимать, как устроены эти способы пребразования знаний
Более строго, проверка логического следствия $\mathsf{F} \models \varphi$ **сводится** к проверке общезначимости формулы:

$$\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Это и означает важность проблемы общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:
$\models \varphi$ **?**

Проблема общезначимости формул

С каких сторон можно исследовать эту проблему?

- как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- как адаптировать метод семантических таблиц логики высказываний к логике предикатов?
- есть ли другие методы проверки общезначимости формул?
- насколько (теоретически) **трудно** проверить общезначимость формулы?
- ...

Проблема общезначимости формул

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\text{формула } \varphi(\widetilde{x}^n) \text{ общезначима} \arrow[r, "\psi = \forall \widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)"] \arrow[d, bend left, "\psi(\widetilde{x}^n) = \neg\varphi(\widetilde{x}^n)"] & \text{предложение } \psi \text{ общезначимо} \\
\text{формула } \psi(\widetilde{x}^n) \text{ невыполнима} \arrow[r, "\varphi = \exists \widetilde{x}^n\ \psi(\widetilde{x}^n)"] \arrow[u, bend left, "\varphi(\widetilde{x}^n) = \neg\psi(\widetilde{x}^n)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi = \psi"', "\text{противоположный ответ}"] & \text{предложение } \varphi \text{ невыполнимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{x}^n) \text{ выполнима} \arrow[r, "\psi = \exists \widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)"] & \text{предложение } \psi \text{ выполнимо}
\end{tikzcd}
$$

$\forall \widetilde{x}^n$ — сокращение для $\forall x_1 \ \ldots \forall x_n$

$\exists \widetilde{x}^n$ — сокращение для $\exists x_1 \ \ldots \exists x_n$

Проблема общезначимости формул

Утверждение

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ общезначима} \arrow[dr, bend left, "\psi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, bend left, "\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \\
\text{формула } \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ невыполнима} \arrow[u, bend left, "\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[dr, bend left, "\varphi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{противоположный ответ}", "\varphi = \psi"'] & \text{предложение } \psi \text{ общезначимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ выполнима} \arrow[dr, bend left, "\psi = \exists \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \varphi \text{ невыполнимо} \\
 & \text{предложение } \psi \text{ выполнимо}
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. Самостоятельно (это просто)

Проблема общезначимости формул

“Лобовой” способ проверки общезначимости формулы, аналогичный построению столбца значений булевой функции — это **перебор всех интерпретаций** с проверкой истинности в них формулы

Этот способ не подходит для логики предикатов:

- Как задать бесконечную интерпретацию и проверить истинность формулы в ней?
- Можно ли ограничиться только какими-либо конечными интерпретациями?

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \mathbin{\&} \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \mathbin{\&} R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

Формула φ необщезначима:

Предметная область: натуральные числа

$R(x,y) =$ “$x < y$”

Посылки φ: никакое число не может быть меньше себя

если $x < y$ и $y < z$ то $x < z$

Вывод φ: существует максимальное натуральное число

Посылки верны, но вывод неверен

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

А если предметная область конечна? *Например:*

Предметная область: все сотрудники компании N

$R(x,y) =$ "игрек является начальником икса"

Посылки φ: никто собой не командует

начальник начальника — тоже начальник

Вывод φ: есть тот, кому никто не указ

И посылки, и вывод верны

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

А что если предметная область конечна? *Общее истолкование:* "Если бинарное отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует элемент, максимальный относительно R"

Проблема общезначимости формул

Утверждение
Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

А что если предметная область конечна? *Общее истолкование:*
“Если R — отношение **строгого частичного порядка**,
то существует элемент, максимальный относительно R”

Любое **конечное** частично упорядоченное множество
содержит максимальный элемент

(это частный случай **леммы Цорна**) ▼

Метод семантических таблиц

Итог: никак нельзя решить проблему “$\models \varphi$?” явным перебором всех интерпретаций с проверкой истинности φ в каждой из них

Можно попытаться решить эту проблему с помощью

метода семантических таблиц:

- рассуждая “от противного”, пытаемся построить **контрмодель** $\mathcal{I}$: $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- при построении будем работать с семантическими таблицами: предположениями о том, что выполняется и не выполняется в $\mathcal{I}$
- эти предположения структурируем в виде дерева вывода, строящегося по правилам табличного вывода
$$\frac{T_0}{T_1, \ (T_2)}$$
- если **все** предположения **явно** опровергнуты закрытыми таблицами, то формула общезначима

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики предикатов) — это пара множеств формул: $T = \langle\, \Gamma \mid \Delta \,\rangle$

Пусть $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все **свободные** переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы φ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы ψ из Δ

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если содержит только атомы

Пример

Следующая семантическая таблица **выполнима**:

$$\langle\, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\rangle$$

(подтверждается интерпретацией: $\{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$
и набором d_1, d_2 значений свободных переменных x, y)

Метод семантических таблиц

Теорема о табличной проверке общезначимости

$$\models \varphi \quad\Leftrightarrow\quad \text{таблица } \langle\ \mid \varphi\ \rangle \text{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$
$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d^n}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{таблица } \langle\ \mid \varphi\ \rangle \text{ невыполнима } \blacktriangledown$$

Утверждение

Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство. Самостоятельно (*очевидно?*)

Метод семантических таблиц

А если формула начинается с квантора, то как из неё получить явное противоречие?

Пример: $\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$?

$$\langle \ \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c}) \ \rangle$$

$$\downarrow \quad \longleftarrow \text{избавляемся от импликации}$$

$$\langle\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c})\, \rangle$$

$$\downarrow ? \quad \longleftarrow \textbf{подставляем} \text{ константу } \mathbf{c} \text{ на место } \mathrm{x}$$

$$\langle\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{c}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c})\, \rangle$$

Строго определим, что такое “**подставляем**”

Подстановки

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\}$
- $\theta(\mathtt{x}_i) = t_i$ $\qquad (1 \leq i \leq n)$

Пара $\mathtt{x}_i/t_i$ — это связка

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула), и θ — подстановка.

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \mathbin{\&} \psi)\theta = (\varphi\theta \mathbin{\&} \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}) \text{ для } \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Подстановки

Пример применения подстановки

φ: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$
θ: $\{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathrm{x},\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

φ: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

К этим вхождениям применяется θ

$\varphi\theta$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathtt{x})$: $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \exists y\, \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathrm{y})$

“если у каждого есть дед, то у $\mathtt{x}$ тоже есть дед”

Очевидно, что $\models \varphi(\mathtt{x})$

Применим к φ подстановку $\theta = \{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}$

$\varphi(\mathtt{x})\theta$: $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

“если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед”

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ, если ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит в области действия квантора, связывающего переменную из множества Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ — правильная для формулы φ, если для каждой связки $\mathtt{x}_i/t_i$ переменная $\mathtt{x}_i$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, подстановка $\{x/y\}$ **не является правильной** для формулы

$$\forall x\, \exists y\, P(x, y) \to \exists y\, \boxed{P(x, y)}$$

а подстановка $\{x/\mathbf{f}(u, v)\}$ — **правильная** для этой формулы

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

правила для логических связок выглядят так же,
как и в логике высказываний:

$$L\& \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\& \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\&\, \psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\vee \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \vee \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\vee \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \vee \psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\!\rightarrow \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle} \qquad R\!\rightarrow \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \rightarrow \psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\neg \frac{\langle\ \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle} \qquad R\neg \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}$$

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

$$L\forall\,\frac{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\,\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\,\varphi,\ \varphi\{\mathtt{x}/t\} \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\exists\,\frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\,\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\,\varphi,\ \varphi\{\mathtt{x}/t\}\ \rangle}$$

Дополнительное ограничение:
переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ

$$L\exists\,\frac{\langle\ \Gamma,\ \exists \mathtt{x}\,\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\forall\,\frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \forall \mathtt{x}\,\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\}\ \rangle}$$

Дополнительное ограничение:
константа **c** не содержится в формулах из Γ, Δ
и в формуле φ

Метод семантических таблиц

Почему важны ограничения в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если разрешить использовать любые подстановки в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle\ \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ |\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})\ \rangle}{\langle\ \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})\ |\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})\ \rangle}\quad \begin{array}{l}\text{— выполнимая таблица}\\ \text{— невыполнимая таблица}\end{array}$$

Если разрешить подставлять “несвежие” константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})\ |\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\ \rangle}{\langle\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\ |\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\ \rangle}\quad \begin{array}{l}\text{— выполнимая таблица}\\ \text{— невыполнимая таблица}\end{array}$$

Метод семантических таблиц

Табличный вывод — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — это конечный вывод, **все** листья которого помечены закрытыми таблицами

А можно ли дословно или с незначительными изменениями перенести из логики высказываний утверждения о табличном выводе для проверки общезначимости формул?

Следующие далее примеры показывают, что **нет**, не всё так просто

Примеры табличных выводов

$$\langle\,|\forall x\,(M(x)\to A(x))\to(\forall x\,M(x)\to\forall x\,A(x))\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle\forall x\,(M(x)\to A(x))\,|\,\forall x\,M(x)\to\forall x\,A(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle\forall x\,(M(x)\to A(x)),\forall x\,M(x)\,|\,\forall x\,A(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle\forall x\,(M(x)\to A(x)),\forall x\,M(x)\,|\,A(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle\forall x\,(M(x)\to A(x)),\forall x\,M(x),M(\mathbf{c})\,|\,A(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle\forall x\,(M(x)\to A(x)),\forall x\,M(x),M(\mathbf{c})\to A(\mathbf{c}),M(\mathbf{c})\,|\,A(\mathbf{c})\rangle$$

$$\swarrow\quad L{\to}\quad\searrow$$

$$\left\langle\begin{array}{l}\forall x\,(M(x)\to A(x)),\\ \forall x\,M(x),A(\mathbf{c}),M(\mathbf{c})\end{array}\,|\,A(\mathbf{c})\right\rangle\qquad\left\langle\begin{array}{l}\forall x\,(M(x)\to A(x)),\\ \forall x\,M(x),M(\mathbf{c})\end{array}\,|\,A(\mathbf{c}),M(\mathbf{c})\right\rangle$$

Закрытая таблица　　　　Закрытая таблица

$$\models\forall x\,(M(x)\to A(x))\to(\forall x\,M(x)\to\forall x\,A(x))\qquad(?)$$

$$\begin{array}{c}
\langle | \exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ P(x) \rangle \\
\big\downarrow R\rightarrow \\
\langle \exists x\ P(x) | \forall x\ P(x) \rangle \\
\big\downarrow L\exists \\
\langle P(\mathbf{c_1}) | \forall x\ P(x) \rangle \\
\big\downarrow R\forall \\
\langle P(\mathbf{c_1}) | P(\mathbf{c_2}) \rangle
\end{array}$$

Незакрытая атомарная таблица

$\not\models \exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ P(x) \quad (?)$

$$\langle \mid \forall x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\Big\downarrow R{\rightarrow}$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1}, y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\Big\downarrow R\exists$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1}, y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x, \mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\Big\downarrow L\exists$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3}) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x, \mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3}) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), P(\mathbf{c_4}, \mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\infty$$

(???)

Корректность табличного вывода

Лемма корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода
$L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\to$: $\dfrac{\langle\ \Gamma,\ \varphi\to\psi\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi\ |\ \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \varphi\ \rangle}$

Может, применить доказательство из леммы корректности для логики высказываний?

Это работает. Надо только

- начать с "Пусть $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы"
- заменить "существует интерпретация $\mathcal{I}$"
  на "существуют интерпретация $\mathcal{I}$ **и набор предметов** $\widetilde{d}^n$"
- заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$ на (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$ **на наборе предметов** $\widetilde{d}^n$

Это работает для всех логических связок

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi, \varphi\,\{\mathtt{x}_0/t\} \mid \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, то она останется выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi, \varphi\{\mathtt{x}_0/t\} \mid \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, она останется выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

При этом:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d}^n], \widetilde{d}^n] \quad \Rightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi\{\mathtt{x}_0/t\}[\widetilde{d}^n]$$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется тот факт, что переменная $\mathtt{x}_0$ свободна для терма t в формуле φ?

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если "верно для $\overline{\mathbf{c}}$", то "существует предмет, для которого верно"

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$

Последнее соотношение означает, что существует предмет d_0, такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$

$\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$, отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы $\mathbf{c}$:

$$\bar{\mathbf{c}} = d_0$$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d}^n]$

Кроме того,

- $\mathcal{J} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{J} \not\models \chi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что $\mathbf{c}$ — “свежая” константа?

Для правил $R\forall$, $R\exists$ доказательство аналогично ▼

Корректность табличного вывода

Теорема корректности табличного вывода

Если существует успешный вывод для семантической таблицы T, то эта таблица невыполнима

Доказательство. Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц

Следствие

Если для таблицы $\langle \ \mid \varphi \ \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А можно ли **построить** этот вывод?
А что делать если такого вывода не существует?

Пусть существует конечный неуспешный табличный вывод:

тогда формула φ необщезначима (почему?)

Пусть такого вывода не существует: ?