

# Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:

[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

2017, весенний семестр

# Лекция 4

## Подстановки

Метод семантических таблиц  
в логике предикатов

Корректность табличного вывода

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

формулируется так:

для заданной формулы  $\varphi$   
логики предикатов  
проверить её общезначимость:

$$\models \varphi ?$$

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

С каких сторон можно исследовать эту проблему?

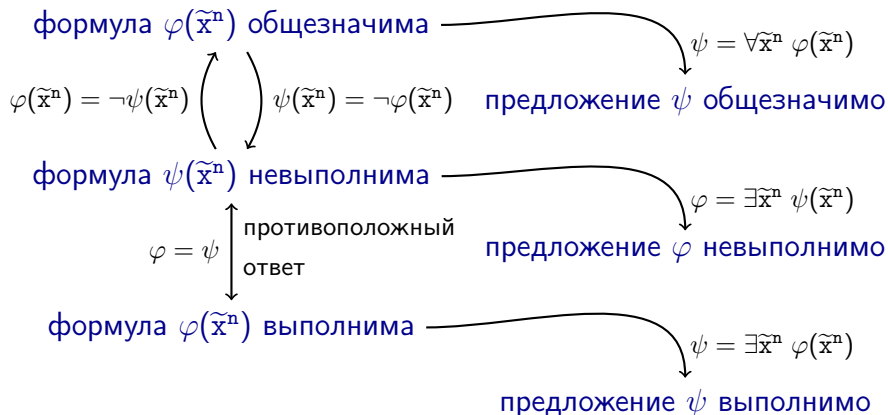
- ▶ как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- ▶ насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- ▶ как адаптировать метод семантических таблиц логики высказываний к логике предикатов?
- ▶ насколько (теоретически) трудно проверить общезначимость формулы?
- ▶ как можно “практически разумно” обобщить задачу SAT на логику предикатов?
- ▶ ...

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

С каких сторон можно исследовать эту проблему?

- ▶ как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- ▶ насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- ▶ как адаптировать метод семантических таблиц логики высказываний к логике предикатов?

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

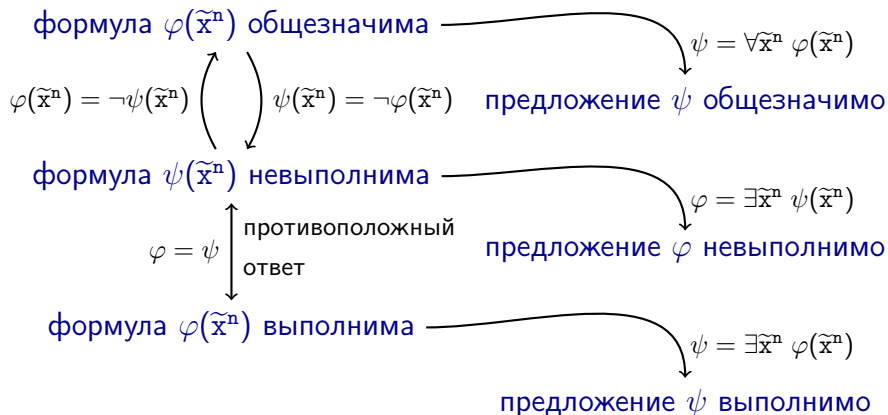


$\forall \tilde{x}^n$  — сокращение для  $\forall x_1 \dots \forall x_n$

$\exists \tilde{x}^n$  — сокращение для  $\exists x_1 \dots \exists x_n$

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

## Утверждение



Доказательство. Самостоятельно (это просто)

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

А как проверить общезначимость формулы?

Подход “в лоб” — перебрать все интерпретации

Как задать бесконечную интерпретацию и проверить истинность формулы в ней?

Можно ли ограничиться только конечными интерпретациями?

## Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью



# Проблема общезначимости формул логики предикатов

## Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \\ \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

## Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

*Формула  $\varphi$  необщезначима:*

Предметная область: натуральные числа

$$R(x, y) = "x < y"$$

Посылки  $\varphi$ : **никакое число не может быть меньше себя**  
**если  $x < y$  и  $y < z$  то  $x < z$**

Вывод  $\varphi$ : **существует максимальное натуральное число**

**Посылки верны, но вывод неверен**

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

## Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

А что если предметная область конечна? *Например:*

Предметная область: все сотрудники компании N

$R(x, y)$  = “игрек является начальником икса”

Посылки  $\varphi$ : никто собой не командует

начальник начальника — тоже начальник

Вывод  $\varphi$ : есть тот, кому никто не указ

И посылки, и вывод верны

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

## Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

А что если предметная область конечна? *Общее истолкование:*

“Если бинарное отношение  $R$  антирефлексивно и транзитивно, то существует элемент, максимальный относительно  $R$ ”

# Проблема общезначимости формул логики предикатов

## Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

**Доказательство.** Вот пример такого предложения  $\varphi$ :

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \ \& \ R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y)$$

А что если предметная область конечна? *Общее истолкование:*

“Если  $R$  — отношение строгого частичного порядка, то существует элемент, максимальный относительно  $R$ ”

Любое **конечное** частично упорядоченное множество  
содержит максимальный элемент

(это частный случай леммы Цорна)



# Метод семантических таблиц

**Итог:** никак нельзя решить проблему “ $\models \varphi?$ ” явным перебором всех интерпретаций с проверкой истинности  $\varphi$  в каждой из них

Можно попытаться решить эту проблему с помощью

метода семантических таблиц:

- ▶ рассуждая “от противного”, пытаемся построить контрмодель  $\mathcal{I}$ :  $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ оперируем семантическими таблицами: предположениями о том, что выполняется и не выполняется в  $\mathcal{I}$
- ▶ эти предположения структурируем в виде дерева вывода, строящегося по правилам табличного вывода

$$\frac{T_0}{T_1, (T_2)}$$

- ▶ если все предположения явно опровергнуты закрытыми таблицами, то формула общезначима

# Метод семантических таблиц

**Семантическая таблица** (логики предикатов) — это пара множеств формул:  $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

$\dots \models \Phi \dots$  ( $\dots \not\models \Phi \dots$ ) — сокращение для

“для любой формулы  $\varphi$  из  $\Phi$  верно (неверно)  $\dots \models \varphi \dots$ ”

( $\Phi$  — множество формул)

Пусть  $\tilde{x}^n$  — все **свободные** переменные формул из  $\Gamma \cup \Delta$

Таблица  $T$  **выполнима**, если существуют интерпретация  $\mathcal{I}$  и набор предметов  $\tilde{d}^n$  из области интерпретации, такие что  $\mathcal{I} \models \Gamma[\tilde{d}^n]$  и  $\mathcal{I} \not\models \Delta[\tilde{d}^n]$

**закрита**, если  $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$

**атомарна**, если содержит только **атомы**

## Пример

Следующая семантическая таблица **выполнима**:

$$\langle \exists x P(x), \neg P(y) \mid \forall x P(x), P(x) \& \neg P(x) \rangle$$

(подтверждается интерпретацией:  $\{d_1, d_2\}$ ,  $\bar{P}(d_1) = \mathbf{t}$ ,  $\bar{P}(d_2) = \mathbf{f}$  и набором  $d_1, d_2$  значений свободных переменных  $x, y$ )

# Метод семантических таблиц

Теорема о табличной проверке общезначимости

$\models \varphi \iff$  таблица  $\langle \mid \varphi \rangle$  невыполнима

Доказательство.

$\models \varphi(\tilde{x}^n)$

$\iff$

$\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$  для любой интерпретации  $\mathcal{I}$   
и любого набора предметов  $\tilde{d}^n$

$\iff$

таблица  $\langle \mid \varphi \rangle$  невыполнима  $\blacktriangledown$

**Утверждение**

Любая закрытая таблица невыполнима

**Утверждение**

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

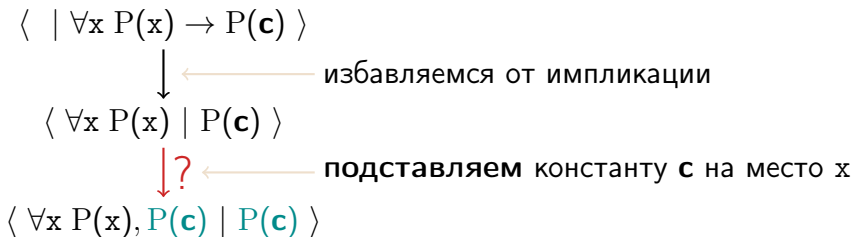
Доказательство. Самостоятельно (очевидно?)



# Метод семантических таблиц

А если формула начинается с квантора, то как из неё получить явное противоречие?

Пример:  $\models \forall x P(x) \rightarrow P(c)$  ?



Строго определим, что такое “подставляем”

# Подстановки

Подстановка — это отображение  $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Область подстановки  $\theta$ :  $\text{Dom}_\theta = \{x \mid x \in \text{Var}, \theta(x) \neq x\}$

Подстановка **конечна**, если её область конечна

**Subst** — множество всех конечных подстановок

$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  — это конечная подстановка  $\theta$ , для которой верно:

▶  $\text{Dom}_\theta = \{x_1, \dots, x_n\}$

▶  $\theta(x_i) = t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

Пара  $x_i/t_i$  — это **связка**

$\varepsilon$  — это **тождественная (пустая)** подстановка:  $\text{Dom}_\theta = \emptyset$

# Подстановки

Пусть  $E$  — логическое выражение (терм или формула) и  $\theta$  — подстановка.

Результат  $E\theta$  применения подстановки  $\theta$  к  $E$  определяется так:

$x\theta = \theta(x)$	$(x \in \text{Var})$
$c\theta = c$	$(c \in \text{Const})$
$f(t_1, \dots, t_n)\theta = f(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$	$(f \in \text{Func}, t_1, \dots, t_n \in \text{Term})$
$P(t_1, \dots, t_n)\theta = P(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$	$(P \in \text{Pred})$
$(\varphi \ \& \ \psi)\theta = (\varphi\theta \ \& \ \psi\theta)$	$(\varphi, \psi \in \text{Form})$
$(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta)$	
$(\varphi \rightarrow \psi)\theta = (\varphi\theta \rightarrow \psi\theta)$	
$(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta)$	
$(\forall x \ \varphi)\theta = (\forall x \ \varphi\theta')$	$(\theta'(x) = x;$
$(\exists x \ \varphi)\theta = (\exists x \ \varphi\theta')$	$\theta'(y) = \theta(y) \text{ для } y \neq x)$

# Подстановки

## Пример применения подстановки

$$\varphi: \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(\mathbf{f(x)}) \vee \exists y P(y) \vee R(\mathbf{u})$$

$$\theta: \{x/\mathbf{g(x, c)}, y/x, z/\mathbf{f(z)}\}$$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в  $\varphi$

$$\varphi: \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(\mathbf{y})) \rightarrow R(\mathbf{f(x)}) \vee \exists y P(y) \vee R(\mathbf{u})$$

К этим вхождениям применяется  $\theta$

$$\varphi\theta: \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(\mathbf{x})) \rightarrow R(\mathbf{f(g(x, c))}) \vee \exists y P(y) \vee R(\mathbf{u})$$

# Подстановки

При применении подстановок для выявления “частных случаев” следует соблюдать осторожность

Например:

$$\varphi(\mathbf{x}): \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(\mathbf{x}, y)$$

“если у каждого есть дед, то у  $\mathbf{x}$  тоже есть дед”

Очевидно, что  $\models \varphi(\mathbf{x})$

Применим к  $\varphi$  подстановку  $\theta = \{x/y\}$

$$\varphi(\mathbf{x})\theta: \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

“если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед”

Очевидно, что  $\not\models \varphi(\mathbf{x})\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

# Подстановки

Переменная  $x$  свободна для терма  $t$  в формуле  $\varphi$ , если ни одно свободное вхождение переменной  $x$  не лежит в области действия квантора, связывающего переменную из множества  $\text{Var}_t$

Подстановка  $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  — правильная для формулы  $\varphi$ , если для каждой связки  $x_i/t_i$  переменная  $x_i$  свободна для терма  $t_i$  в формуле  $\varphi$

**Например**, подстановка  $\{x/y\}$  не является правильной для формулы

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(x, y)$$

а подстановка  $\{x/f(u, v)\}$  — правильная для этой формулы

# Метод семантических таблиц

## Правила табличного вывода:

правила для логических связок такие же,  
как в логике высказываний:

$$L\& \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\& \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

# Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

$$L\forall \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi, \varphi \{x/t\} \mid \Delta \rangle} \quad R\exists \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi, \varphi \{x/t\} \rangle}$$

Дополнительное ограничение:

переменная  $x$  свободна для термина  $t$  в формуле  $\varphi$

$$L\exists \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \{x/c\} \mid \Delta \rangle} \quad R\forall \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall x \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \{x/c\} \rangle}$$

Дополнительное ограничение:

константа  $c$  не содержится в формулах из  $\Gamma$ ,  $\Delta$   
и в формуле  $\varphi$



# Метод семантических таблиц

Почему важны ограничения в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если разрешить использовать любые подстановки в  $L\forall$ ,  $R\exists$ :

$\langle \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y P(y, y) \rangle$  — выполнимая таблица

$\langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(y, y) \mid \exists y P(y, y) \rangle$  — невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять “несвежие” константы в  $L\exists$ ,  $R\forall$ :

$\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle$  — выполнимая таблица

$\langle P(c) \mid P(c) \rangle$  — невыполнимая таблица

# Метод семантических таблиц

**Табличный вывод** — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

**Успешный** табличный вывод (**табличное опровержение**) — это **конечный** вывод, все листья которого помечены **закрытыми** таблицами

А можно ли дословно или с незначительными изменениями перенести из логики высказываний утверждения о табличном выводе для проверки общезначимости формул?

Следующие далее **примеры** показывают, что **нет**, не всё так просто

# Примеры табличных выводов

$$\langle \langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)) \rightarrow (\forall x M(x) \rightarrow \forall x A(x)) \rangle \rangle$$

$$\downarrow R \rightarrow$$

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)) \mid \forall x M(x) \rightarrow \forall x A(x) \rangle$$

$$\downarrow R \rightarrow$$

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)), \forall x M(x) \mid \forall x A(x) \rangle$$

$$\downarrow R \forall$$

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)), \forall x M(x) \mid A(c) \rangle$$

$$\downarrow L \forall$$

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)), \forall x M(x), M(c) \mid A(c) \rangle$$

$$\downarrow L \forall$$

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)), \forall x M(x), M(c) \rightarrow A(c), M(c) \mid A(c) \rangle$$

$$L \rightarrow$$

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)), \forall x M(x), A(c), M(c) \mid A(c) \rangle$$

Закрытая таблица

$$\langle \forall x (M(x) \rightarrow A(x)), \forall x M(x), M(c) \mid A(c), M(c) \rangle$$

Закрытая таблица

$$\models \forall x (M(x) \rightarrow A(x)) \rightarrow (\forall x M(x) \rightarrow \forall x A(x)) \quad (?)$$

$$\begin{array}{c}
 \langle \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \rangle \\
 \downarrow R \rightarrow \\
 \langle \exists x P(x) \mid \forall x P(x) \rangle \\
 \downarrow L \exists \\
 \langle P(c_1) \mid \forall x P(x) \rangle \\
 \downarrow R \forall \\
 \langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle
 \end{array}$$

Незакрытая атомарная таблица

$$\not\models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \quad (?)$$

$$\begin{array}{c}
\langle \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\
\downarrow R \rightarrow \\
\langle \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\
\downarrow L \forall \\
\langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(\mathbf{c}_1, y) \mid \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\
\downarrow R \exists \\
\langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(\mathbf{c}_1, y) \mid \exists y \forall x P(x, y), \forall x P(x, \mathbf{c}_2) \rangle \\
\downarrow L \exists \\
\langle \forall x \exists y P(x, y), P(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) \mid \exists y \forall x P(x, y), \forall x P(x, \mathbf{c}_2) \rangle \\
\downarrow R \forall \\
\langle \forall x \exists y P(x, y), P(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) \mid \exists y \forall x P(x, y), P(\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_2) \rangle \\
\downarrow L \forall \\
\infty
\end{array}$$

(???)

# Корректность табличного вывода

## Лемма корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1, (T_2)},$$

таблица  $T_0$  выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица  $T_1$  (или выполнима таблица  $T_2$ )

# Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило  $L\rightarrow$ : 
$$\frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

Может, применить доказательство из леммы корректности для логики высказываний?

Это работает. Надо только

- ▶ начать с “Пусть  $\tilde{x}^n$  — все свободные переменные формул верхней таблицы”
- ▶ заменить “существует интерпретация  $\mathcal{I}$ ” на “существуют интерпретация  $\mathcal{I}$  и набор предметов  $\tilde{d}^n$ ”
- ▶ заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации  $\mathcal{I}$  на (не)выполнимость формулы в интерпретации  $\mathcal{I}$  на наборе предметов  $\tilde{d}^n$

Это работает для всех логических связок



# Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило  $L\forall$ : 
$$\frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi, \varphi \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle}$$

( $\Leftarrow$ ): очевидно: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, она остаётся выполнимой

( $\Rightarrow$ ): пусть верхняя таблица выполнима, и  $\tilde{x}^n$  — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима  $\Leftrightarrow$

существуют интерпретация  $\mathcal{I}$  и набор предметов  $\tilde{d}^n$ , такие что

$$\mathcal{I} \models \Gamma[\tilde{d}^n], \quad \mathcal{I} \not\models \Delta[\tilde{d}^n], \quad \mathcal{I} \models (\forall x_0 \varphi)[\tilde{d}^n]$$

# Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило  $L\forall$ : 
$$\frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi, \varphi \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle}$$

( $\Leftarrow$ ): очевидно: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, она остаётся выполнимой

( $\Rightarrow$ ): пусть верхняя таблица выполнима, и  $\tilde{x}^n$  — все свободные переменные формул нижней таблицы

При этом:

$$\mathcal{I} \models (\forall x_0 \varphi)[\tilde{d}^n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[t[\tilde{d}^n], \tilde{d}^n] \quad \Rightarrow \\ \mathcal{I} \models \varphi \{x_0/t\} [\tilde{d}^n]$$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется тот факт, что переменная  $x_0$  свободна для терма  $t$  в формуле  $\varphi$ ?

# Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило  $L\exists$ : 
$$\frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \{x/c\} \mid \Delta \rangle}$$

( $\Leftarrow$ ): очевидно: если “верно для  $\bar{c}$ ”, то “существует предмет, для которого верно”

( $\Rightarrow$ ): пусть верхняя таблица выполнима, и  $\tilde{x}^n$  — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима  $\Leftrightarrow$

существуют интерпретация  $\mathcal{I}$  и набор предметов  $\tilde{d}^n$ , такие что

$$\mathcal{I} \models \Gamma[\tilde{d}^n], \quad \mathcal{I} \not\models \Delta[\tilde{d}^n], \quad \mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi)[\tilde{d}^n]$$

Последнее соотношение означает, что существует предмет  $d_0$ , такой что  $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$

# Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило  $L\exists$ :  $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathbf{x} \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \{ \mathbf{x}/\mathbf{c} \} \mid \Delta \rangle}$

$\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию  $\mathcal{J}$ , отличающуюся от  $\mathcal{I}$  только оценкой константы  $\mathbf{c}$ :

$$\bar{\mathbf{c}} = d_0$$

Тогда  $\mathcal{J} \models (\varphi \{ \mathbf{x}/\mathbf{c} \})[\tilde{d}^n]$

Кроме того,  $\mathcal{J} \models \Gamma[\tilde{d}^n]$  и  $\mathcal{J} \not\models \Delta[\tilde{d}^n]$

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что  $\mathbf{c}$  — “свежая” константа?

Для правил  $R\forall$ ,  $R\exists$  доказательство аналогично



# Корректность табличного вывода

## Теорема корректности табличного вывода

Если существует успешный вывод для семантической таблицы  $T$ , то эта таблица невыполнима

**Доказательство.** Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц

## Следствие

Если для таблицы  $\langle \mid \varphi \rangle$  существует успешный табличный вывод, то  $\models \varphi$

А можно ли построить этот вывод?

А что делать если такого вывода не существует?

Пусть существует конечный неуспешный табличный вывод:  
тогда формула  $\varphi$  необщезначима (почему?)

Пусть такого вывода не существует: ?

Конец лекции 4