Математическая логика

и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2016, весенний семестр

Лекция 4

Подстановки

Метод семантических таблиц
в логике предикатов

Корректность табличного вывода

Проблема общезначимости формул логики предикатов

формулируется так:

для заданной формулы φ
логики предикатов
проверить её общезначимость:

$$\models \varphi\ ?$$

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Что полезного можно рассказать про эту проблему?

- как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- как адаптировать метод семантических таблиц к логике предикатов?
- насколько (теоретически) трудно проверить общезначимость формулы?
- как можно "практически разумно" обобщить задачу SAT на логику предикатов?
- ...

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Что полезного можно рассказать про эту проблему?

- как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- как адаптировать метод семантических таблиц к логике предикатов?

Проблема общезначимости формул логики предикатов

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ общезначима

$\psi = \forall\widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)$

$\varphi(\widetilde{x}^n) = \neg\psi(\widetilde{x}^n)$ $\quad$ $\psi(\widetilde{x}^n) = \neg\varphi(\widetilde{x}^n)$

предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\widetilde{x}^n)$ невыполнима

$\varphi = \exists\widetilde{x}^n\ \psi(\widetilde{x}^n)$

противоположный ответ

предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ выполнима

$\psi = \exists\widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)$

предложение ψ выполнимо

"$\widetilde{x}^n$" = "$x_1, \ldots, x_n$" $\qquad$ "$\forall\widetilde{x}^n$" = "$\forall x_1 \ldots \forall x_n$"

"$\exists\widetilde{x}^n$" = "$\exists x_1 \ldots \exists x_n$"

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Утверждение

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ общезначима} \arrow[d, bend left, "\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[r, bend left, "\psi = \forall\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \psi \text{ общезначимо} \\
\text{формула } \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ невыполнима} \arrow[u, bend left, "\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{противоположный ответ}"] \arrow[r, bend left, "\varphi = \exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \varphi \text{ невыполнимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ выполнима} \arrow[r, bend left, "\psi = \exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})"] & \text{предложение } \psi \text{ выполнимо}
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. Самостоятельно (это просто)

Проблема общезначимости формул логики предикатов

А как проверить общезначимость формулы?

Подход “в лоб” — перебрать все интерпретации

Как задать бесконечную интерпретацию и проверить истинность формулы в ней?

А что если ограничиться только конечными интерпретациями?

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x \, \neg R(x, x) \mathbin{\&} \forall x \, \forall y \, \forall z \, (R(x, y) \mathbin{\&} R(y, z) \to R(x, z)) \to \exists x \, \forall y \, \neg R(x, y)$$

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

Формула φ необщезначима:

Предметная область: натуральные числа

$R(x,y) =$ “$x < y$”

Посылки φ: никакое число не может быть меньше себя

если $x < y$ и $y < z$ то $x < z$

Вывод φ: существует максимальное натуральное число

Посылки верны, но вывод неверен

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

А что если предметная область конечна? *Например:*

Предметная область: все сотрудники компании N

$R(x,y) =$ “игрек является начальником икса”

Посылки φ: никто собой не командует

начальник начальника — тоже начальник

Вывод φ: есть самый главный босс

И посылки, и вывод верны

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathtt{x}\, \neg \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{x}) \,\&\, \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathtt{y},\mathtt{z}) \to \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{z})) \to \exists \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \neg \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

А что если предметная область конечна? *Общее истолкование:*

“Если бинарное отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует элемент, максимальный относительно R”

Проблема общезначимости формул логики предикатов

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

А что если предметная область конечна? *Общее истолкование:*

“Если R — отношение **строгого частичного порядка**, то существует элемент, максимальный относительно R”

Любое **конечное** частично упорядоченное множество содержит максимальный элемент

(это частный случай **леммы Цорна**) ▼

Метод семантических таблиц

Итог: никак нельзя решить проблему "$\models \varphi$?" явным перебором всех интерпретаций с проверкой истинности φ в каждой из них

Можно попытаться решить эту проблему с помощью

метода семантических таблиц:

- рассуждая "от противного", пытаемся построить **контрмодель** $\mathcal{I}$: $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- преобразуем семантические таблицы: предположения о том, что выполняется и не выполняется в $\mathcal{I}$
- эти предположения структурируем в виде дерева вывода, строящегося по правилам табличного вывода
$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)}$$
- если **все** предположения **явно** опровергнуты закрытыми таблицами, то формула общезначима

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики предикатов) — это пара множеств формул: $T = \langle\, \Gamma \mid \Delta \,\rangle$

Для наглядности будем писать $\langle\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \mid \psi_1, \ldots, \psi_k \,\rangle$
вместо $\langle\, \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \mid \{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \,\rangle$

Пусть $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все **свободные** переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

- для любой формулы $\varphi \in \Gamma$ верно: $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$
- для любой формулы $\psi \in \Delta$ верно: $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$
атомарна, если содержит только атомы

Метод семантических таблиц

Пример

Следующая семантическая таблица **выполнима**:

$$\langle\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})\ \rangle$$

(подтверждается интерпретацией: $\{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$ и набором d_1, d_2 значений свободных переменных x, y)

Теорема о табличной проверке общезначимости

$\models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad$ **таблица** $\langle\ \mid \varphi\ \rangle$ **невыполнима**

Доказательство. $\models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^{\,n}]$ для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любого набора предметов $\widetilde{d}^{\,n}$ $\Leftrightarrow$ таблица $\langle\ \mid \varphi\ \rangle$ невыполнима ▼

Утверждение

Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство. Самостоятельно

Метод семантических таблиц

А если формула начинается с квантора, то как из неё получить явное противоречие?

Пример: $\models \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})$?

$$\langle\ \mid \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad \longleftarrow \text{избавляемся от импликации}$$

$$\langle\ \forall x\, P(x) \mid P(\mathbf{c})\ \rangle$$

$$\Big\downarrow ? \quad \longleftarrow \textbf{подставляем}\ \text{константу}\ \mathbf{c}\ \text{на место}\ x$$

$$\langle\ \forall x\, P(x), P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c})\ \rangle$$

Что же такое эта “подстановка”?

Подстановки

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x_1}/t_1, \ldots, \mathtt{x_n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x_1}, \ldots, \mathtt{x_n}\}$
- $\theta(\mathtt{x_i}) = t_i \qquad (1 \leq i \leq n)$

Пара $\mathtt{x_i}/t_i$ — это связка

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\theta = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение и θ — подстановка.
Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

- $\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x})$ $\qquad (\mathrm{x} \in \mathsf{Var})$
- $\mathbf{c}\theta = \mathbf{c}$ $\qquad (\mathbf{c} \in \mathsf{Const})$
- $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$ $\qquad (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Term})$
- $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$ $\qquad (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred})$
- $(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta)$ $\qquad (\varphi, \psi \in \mathsf{Form})$
- $(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta)$
- $(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta)$
- $(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta)$
- $(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta')$ $\qquad (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x};$
- $(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta')$ $\qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y})$ для $\mathrm{y} \neq \mathrm{x})$

Подстановки

Пример применения подстановки

φ: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$
θ: $\{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathrm{x},\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

φ: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$

К этим вхождениям применяется θ

$\varphi\theta$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$

Подстановки

При применении подстановок следует соблюдать осторожность

Например:
$\varphi(\mathtt{x})$: $\forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$

"если у каждого есть дед, то у $\mathtt{x}$ тоже есть дед"

Очевидно, что $\models \varphi(\mathtt{x})$

Применим к φ подстановку $\theta = \{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}$

$\varphi(\mathtt{x})\theta$: $\forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \to \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{y}, \mathtt{y})$

"если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед"

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ, если ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит в области действия квантора, связывающего переменную из множества Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — правильная для формулы φ, если для каждой связки $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ переменная $\mathtt{x}_\mathtt{i}$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ **не является правильной** для формулы

$$\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

а подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — **правильная** для этой формулы

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

эти правила такие же, как в логике высказываний

$L\&$ $$\frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta \,\rangle}$$

$R\&$ $$\frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\&\, \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$L\vee$ $$\frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \vee \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle}$$

$R\vee$ $$\frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \vee \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi \,\rangle}$$

$L\to$ $$\frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \to \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle}$$

$R\to$ $$\frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \to \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$L\neg$ $$\frac{\langle\, \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle}$$

$R\neg$ $$\frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle}$$

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

$$L\forall \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}),\ \varphi(\mathrm{x})\,\{\mathrm{x}/t\}\ |\ \Delta\ \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(\mathrm{x})$

$$R\forall \quad \frac{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \forall \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})\ \rangle}{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \varphi(\mathrm{x})\,\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}\ \rangle}$$

константа **c** не содержится в формулах из Γ, Δ
и в формуле $\varphi(\mathrm{x})$

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

$$L\exists \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}) \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi(\mathrm{x})\,\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$$

константа **c** не содержится в формулах из Γ, Δ
и в формуле $\varphi(\mathrm{x})$

$$R\exists \quad \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}),\ \varphi(\mathrm{x})\,\{\mathrm{x}/t\}\ \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(\mathrm{x})$

Метод семантических таблиц

Почему важны ограничения в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если разрешить использовать любые подстановки в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle\ \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ |\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})\ \rangle}{\langle\ \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})\ |\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять “несвежие” константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})\ |\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\ \rangle}{\langle\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\ |\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Метод семантических таблиц

Табличный вывод — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — это конечный вывод, **все** листья которого помечены закрытыми таблицами

А можно ли дословно или с незначительными изменениями перенести из логики высказываний утверждения о табличном выводе для проверки общезначимости формул?

Следующие далее примеры показывают, что **нет**, не всё так просто

Примеры табличных выводов

$$\langle \,|\, \forall x\,(M(x) \to A(x)) \to (\forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x))\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)) \,|\, \forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x) \,|\, \forall x\, A(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x) \,|\, A(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x), M(\mathbf{c}) \,|\, A(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x), M(\mathbf{c}) \to A(\mathbf{c}), M(\mathbf{c}) \,|\, A(\mathbf{c})\rangle$$

$$\swarrow \quad L{\to} \quad \searrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(M(x) \to A(x)), \\ \forall x\, M(x), A(\mathbf{c}), M(\mathbf{c}) \end{array} \,\middle|\, A(\mathbf{c}) \right\rangle \qquad \left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(M(x) \to A(x)), \\ \forall x\, M(x), M(\mathbf{c}) \end{array} \,\middle|\, A(\mathbf{c}), M(\mathbf{c}) \right\rangle$$

Закрытая таблица | Закрытая таблица

$$\models \forall x\,(M(x) \to A(x)) \to (\forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x)) \qquad (?)$$

$$\langle \,|\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\rightarrow$$

$$\langle \exists x\, P(x) | \forall x\, P(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow L\exists$$

$$\langle P(\mathbf{c_1}) | \forall x\, P(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle P(\mathbf{c_1}) | P(\mathbf{c_2})\rangle$$

Незакрытая атомарная таблица

$\not\models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$ (?)

$$\langle \mid \forall x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow R\rightarrow$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow L\exists$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\infty$$

(???)

Корректность табличного вывода

Лемма корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода $L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\rightarrow$, $R\rightarrow$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L{\to}$: $\dfrac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \to \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle}$

Может, применить доказательство из леммы корректности для логики высказываний?

Это работает. Надо только

- начать с "Пусть $\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы"
- заменить "существует интерпретация $\mathcal{I}$" на "существуют интерпретация $\mathcal{I}$ **и набор предметов** $\widetilde{d^n}$"
- заменить "$\mathcal{I}(\mathfrak{F}) = \mathbf{t}$" на "$\mathcal{I} \models \mathfrak{F}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$"
- заменить "$\mathcal{I}(\mathfrak{F}) = \mathbf{f}$" на "$\mathcal{I} \not\models \mathfrak{F}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$"

Это работает для всех логических связок

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0)\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0), \varphi(\mathrm{x}_0)\ \{\mathrm{x}_0/t\}\ |\ \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, она остаётся выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$ существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

$$\mathcal{I} \models \Gamma[\widetilde{d}^n], \qquad \mathcal{I} \not\models \Delta[\widetilde{d}^n], \qquad \mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$$

При этом:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d}^n], \widetilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi\ \{\mathrm{x}_0/t\}\ [\widetilde{d}^n]$$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется тот факт, что переменная x_0 свободна для терма t в формуле φ?

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi(\mathrm{x})\ \{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}\ |\ \Delta\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если "верно для $\bar{\mathbf{c}}$", то "существует предмет, для которого верно"

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$ существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

$$\mathcal{I} \models \Gamma[\widetilde{d}^n], \qquad \mathcal{I} \not\models \Delta[\widetilde{d}^n], \qquad \mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$$

Последнее соотношение означает, что существует предмет d_0, такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi(\mathrm{x})\ \{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}\ |\ \Delta\ \rangle}$

$\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$, отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы **c**: $\overline{c} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\,\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d}^n]$

Кроме того, $\mathcal{J} \models \Gamma[\widetilde{d}^n]$ и $\mathcal{J} \not\models \Delta[\widetilde{d}^n]$ (почему?)

Значит, нижняя таблица выполнима

Для правил $R\forall$, $R\exists$ доказательство аналогично ▼

А где используется тот факт, что **c** — “свежая” константа?

Корректность табличного вывода

Теорема корректности табличного вывода
Если для семантической таблицы θ существует успешный табличный вывод, то таблица θ невыполнима

Доказательство. Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц

Следствие
Если для таблицы $\langle \ \mid \varphi \ \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А можно ли **построить** этот вывод?
А что если такого вывода не существует?

Пусть существует конечный неуспешный табличный вывод:
тогда формула φ необщезначима (почему?)

Пусть такого вывода не существует: ?

Конец лекции 4