Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

Лекция 4

Подстановки

Табличный вывод

Корректность табличного вывода

Пример

$$\models\ \forall x\, P(x) \to P(f(c)) \vee \exists y\, R(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{таблица } \langle\ \mid \forall x\, P(x) \to P(f(c)) \vee \exists y\, R(y)\ \rangle \text{ невыполнима}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{таблица } \langle\ \forall x\, P(x) \mid P(f(c)) \vee \exists y\, R(y)\ \rangle \text{ невыполнима}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{таблица } \langle\ \forall x\, P(x) \mid P(f(c)),\ \exists y\, R(y)\ \rangle \text{ невыполнима}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{таблица } \langle\ \forall x\, P(x),\ P(f(c)) \mid P(f(c)),\ \exists y\, R(y)\ \rangle \text{ невыполнима}$$

Последний шаг — переход от общего утверждения $\forall x\, P(x)$ к его частному случаю $P(f(c))$

Была произведена подстановка терма $f(c)$ вместо переменной x

Что такое “подстановка”?

Подстановки

Подстановка — это отображение $\theta : Var \to Term$

Область подстановки θ: $Dom_\theta = \{x \mid x \in Var,\ \theta(x) \neq x\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

Если $Dom_\theta = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то подстановка θ однозначно определяется множеством пар

$$\{x_1/\theta(x_1), \ldots, x_n/\theta(x_n)\}$$

Каждая пара $x_i/\theta(x_i)$ — связка

ε — тождественная (пустая) подстановка: $Dom_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение и θ — подстановка. Тогда результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

- $x\theta = \theta(x)$ $\qquad (x \in Var)$
- $c\theta = c$ $\qquad (c \in Const)$
- $f(t_1, \ldots, t_n)\theta = f(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$ $\qquad (f \in Func,\ t_1, \ldots, t_n \in Term)$
- $P(t_1, \ldots, t_n)\theta = P(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$ $\qquad (P \in Pred)$
- $(\varphi \& \psi)\theta = (\varphi\theta \& \psi\theta)$ $\qquad (\varphi, \psi \in Form)$
- $(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta)$
- $(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta)$
- $(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta)$
- $(\forall x\ \varphi)\theta = (\forall x\ \varphi\theta')$, где

  $\theta'(x) = x$ и $\theta'(y) = \theta(y)$ при $y \in Var$, $y \neq x$
- $(\exists x\ \varphi)\theta = (\exists x\ \varphi\theta')$

Подстановки

Пример применения подстановки

φ: $\forall x\,(P(x) \to \neg R(y)) \to R(f(x)) \vee \exists y\, P(y)$
θ: $\{x/g(x,c),\ y/x,\ z/f(z)\}$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

form: $\forall x\,(P(x) \to \neg R(y)) \to R(f(x)) \vee \exists y\, P(y)$

К этим вхождениям применяется θ

$\varphi\theta$: $\forall x\,(P(x) \to \neg R(x)) \to R(f(g(x,c))) \vee \exists y\, P(y)$

Подстановки

При применении подстановок следует соблюдать осторожность

Например:

“если у каждого есть дед, то у субъекта x тоже есть дед”

$\varphi(x)$: $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \to \exists y\, P(x, y)$

Очевидно, что $\models \varphi(x)$

Применим к φ подстановку $\theta = \{x/y\}$

$\varphi(x)\theta$: $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \to \exists y\, P(y, y)$

“если у каждого есть дед, то есть и тот, кто является дедом самому себе”

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная x свободна для терма t в формуле φ, если ни одно свободное вхождение переменной x не лежит в области действия квантора, связывающего переменную из множества Var_t

Подстановка $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ — правильная для формулы φ, если для каждой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ

Например, подстановка $\{x/y\}$ не является правильной для формулы

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y) \to \exists y\ P(x, y)$$

а подстановка $\{x/f(u, v)\}$ — правильная для этой формулы

Табличный вывод

Правила табличного вывода имеют следующий вид:

$$(*):\ \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**):\ \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Правила прочитываются так:

(*): **таблица** T_0 **выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица** T_1

(**): **таблица** T_0 **выполнима тогда и только тогда, когда выполнима хотя бы одна из таблиц** T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 в (**) — это альтернативы

Табличный вывод

Правила табличного вывода:

$$L\& \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi\&\psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\& \quad \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\&\psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\vee \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi\vee\psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\vee \quad \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\vee\psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\to \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi\to\psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle} \qquad R\to \quad \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\to\psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\neg \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle} \qquad R\neg \quad \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}$$

Табличный вывод

Правила табличного вывода:

$$L\forall \qquad \frac{\langle\ \Gamma,\ \forall x\varphi(x)\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \forall x\varphi(x),\ \varphi(x)\,\{x/t\}\ |\ \Delta\ \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

$$R\forall \qquad \frac{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \forall x\varphi(x)\ \rangle}{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \varphi(x)\,\{x/c\}\ \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ, Δ
и в формуле $\varphi(x)$

Табличный вывод

Правила табличного вывода:

$$L\exists \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \exists x\varphi(x)\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi(x)\,\{x/c\}\ |\ \Delta\ \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ, Δ
и в формуле $\varphi(x)$

$$R\exists \quad \frac{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \exists x\varphi(x)\ \rangle}{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \exists x\varphi(x),\ \varphi(x)\,\{x/t\}\ \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

Табличный вывод

Почему важны ограничения в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$:

Если разрешить использовать любые подстановки в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle\ \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y P(y, y)\ \rangle}{\langle\ \forall x \exists y P(x, y),\ \exists y P(y, y) \mid \exists y P(y, y)\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять "несвежие" константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle\ \exists x P(x) \mid P(c)\ \rangle}{\langle\ P(c) \mid P(c)\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

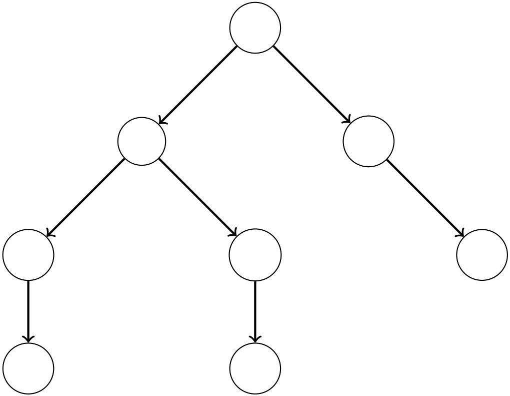
— невыполнимая таблица

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это

Табличный вывод

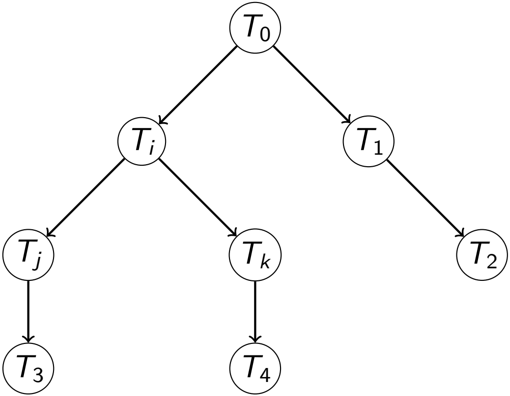
Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

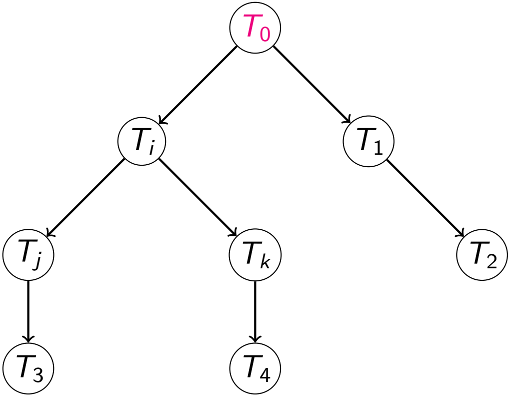
1. его вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

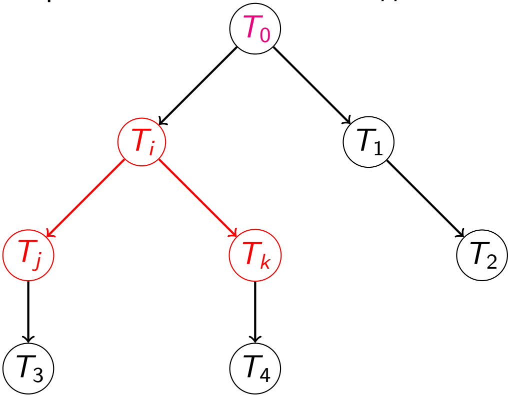
2. его корню приписана таблица T_0



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

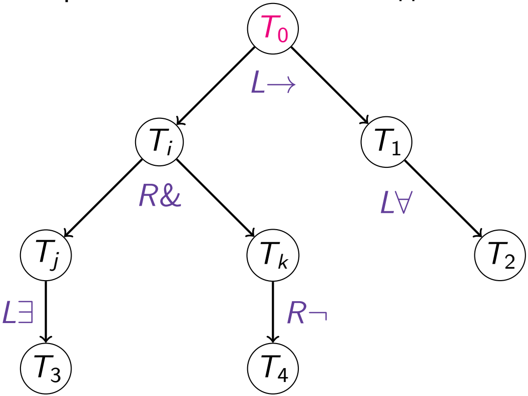
3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) $\Leftrightarrow$
   $\dfrac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

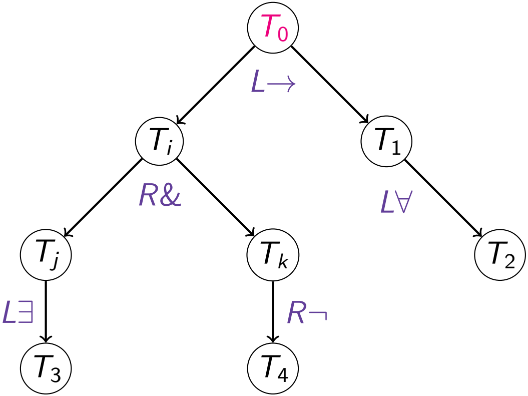
3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

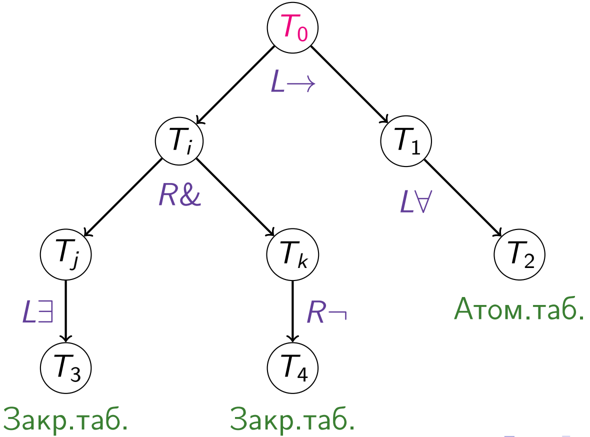
4. его листья — либо закрытые, либо атомарные таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

4. его листья — либо закрытые, либо атомарные таблицы



Табличный вывод

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — это конечный табличный вывод, все листья которого — закрытые таблицы

Зачем нужен успешный табличный вывод?

Он показывает, что таблица, для которой он построен, невыполнима

Если он построен для таблицы $\langle \ \mid \varphi \ \rangle$, то это означает, что $\models \varphi$

Табличный вывод

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x\,(M(x)\to A(x)) \to (\forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x))\rangle$$

$$\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(M(x)\to A(x)) \mid \forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x)\rangle$$

$$\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(M(x)\to A(x)), \forall x\, M(x) \mid \forall x\, A(x)\rangle$$

$$\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x)\to A(x)), \forall x\, M(x) \mid A(c)\rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x)\to A(x)), \forall x\, M(x), M(c) \mid A(c)\rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x)\to A(x)), \forall x\, M(x), M(c) \to A(c), M(c) \mid A(c)\rangle$$

$$\swarrow\ L{\to}\ \searrow$$

$$\left\langle \begin{matrix}\forall x\,(M(x)\to A(x)),\\ \forall x\, M(x), A(c), M(c)\end{matrix} \mid A(c)\right\rangle \qquad \left\langle \begin{matrix}\forall x\,(M(x)\to A(x)),\\ \forall x\, M(x), M(c)\end{matrix} \mid A(c), M(c)\right\rangle$$

Закрытая таблица　　　　　Закрытая таблица

$$
\begin{array}{c}
\langle \mid \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x) \rangle \\
\Big\downarrow R\!\to \\
\langle \exists x\, P(x) \mid \forall x\, P(x) \rangle \\
\Big\downarrow L\exists \\
\langle P(c_1) \mid \forall x\, P(x) \rangle \\
\Big\downarrow R\forall \\
\langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle
\end{array}
$$

Незакрытая атомарная таблица

$$
\begin{array}{c}
\langle | \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y) \rangle \\
\Big\downarrow R\!\to \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y) | \exists y\, \forall x\, P(x,y) \rangle \\
\Big\downarrow L\forall \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), \exists y\, P(c_1,y) | \exists y\, \forall x\, P(x,y) \rangle \\
\Big\downarrow R\exists \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), \exists y\, P(c_1,y) | \exists y\, \forall x\, P(x,y), \forall x\, P(x,c_2) \rangle \\
\Big\downarrow L\exists \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), P(c_1,c_3) | \exists y\, \forall x\, P(x,y), \forall x\, P(x,c_2) \rangle \\
\Big\downarrow R\forall \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), P(c_1,c_3) | \exists y\, \forall x\, P(x,y), P(c_4,c_2) \rangle \\
\Big\downarrow L\forall \\
\infty
\end{array}
$$

Корректность табличного вывода

Лемма о корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода
$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L \rightarrow, R \rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $\quad L\to: \dfrac{\langle \Gamma, \varphi\to\psi | \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta\rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta\rangle}$.

Таблица $\langle \Gamma, \varphi\to\psi | \Delta\rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n\rangle$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi\to\psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \iff \begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \text{ или } \begin{cases} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{cases} \iff$$

одна из таблиц $T_1 = \langle \Gamma, \psi | \Delta\rangle$ или $T_2 = \langle \Gamma | \varphi, \Delta\rangle$ выполнима.

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Аналогично доказывается корректность остальных 7 правил для логических связок

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle}$.

Таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Пусть $d_0 = t[d_1, \dots, d_n]$. Тогда

$$I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n].$$

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации I

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что переменная x_0 свободна для терма t в формуле φ ?

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $\quad L\exists\colon \dfrac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$.

Очевидно, что выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ влечет выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$. Тогда существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\exists x \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Выполнимость $\exists x \varphi[d_1, \dots, d_n]$ означает, что существует такой элемент $d_0 \in D_I$, что $I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n]$.

Корректность табличного вывода

Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию J, которая отличается от I, только тем, что в J константа c имеет другое значение, а именно $\bar{c} = d_0$.

Тогда $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$.

Кроме того, $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$ и $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$. Почему?

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации J.

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что константа c не входит в состав формул из Γ, Δ и формулы φ ?

Корректность табличного вывода

Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима.

Доказательство

Следует из

- определения табличного вывода,
- леммы о корректности правил табличного вывода,
- и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

Следствие

Если для таблицы $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ |\varphi\ \rangle$ можно построить успешный табличный вывод, то $\models \varphi$.

Конец лекции 4