Модели вычислений

В.А. Захаров

Лекция 8.

1. Дерево вывода для КС-грамматик
2. Теорема о разрастании для КС-языков
3. Примеры языков, не являющихся контекстно-свободными
4. Магазинные автоматы и их языки
5. Соответствие между КС-грамматиками и магазинными автоматами
6. Детерминированные магазинные автоматы

ДЕРЕВЬЯ ВЫВОДА ДЛЯ КС-ГРАММАТИК

Как доказать, что формальный язык **не является** контекстно-свободным?

Какие вычислительные устройства способны распознавать контекстно-свободные языки?

ДЕРЕВЬЯ ВЫВОДА ДЛЯ КС-ГРАММАТИК

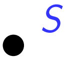
Дерево вывода — это двумерный способ представления грамматического вывода для КС-грамматик.

Деревом вывода для КС-грамматики $G = (\Sigma, \mathcal{N}, P, S)$ называется упорядоченное корневое дерево, вершинами которого являются слово ε, терминалы и нетерминалы грамматики, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. корнем дерева служит начальный нетерминал S,
2. если дерево вывода содержит нетерминал N, и в грамматике есть правило $N \to x_1 x_2 \ldots x_k$, то вершина N имеет k вершин-потомков $x_1, x_2, \ldots, x_k$, расположенных в указанном порядке.

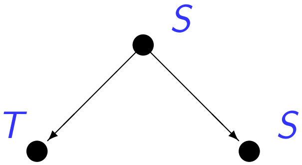
Деревья вывода для КС-грамматик

$S \to TS$
$S \to aSb$
$S \to \varepsilon$
$T \to bSa$



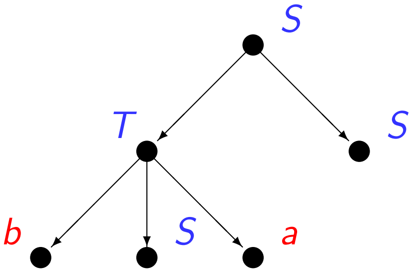
Деревья вывода для КС-грамматик

$$S \rightarrow TS$$
$$S \rightarrow aSb$$
$$S \rightarrow \varepsilon$$
$$T \rightarrow bSa$$



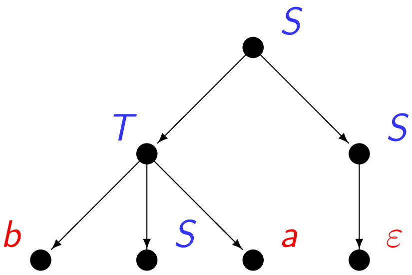
Деревья вывода для КС-грамматик

$$\begin{aligned} S &\to TS \\ S &\to aSb \\ S &\to \varepsilon \\ T &\to bSa \end{aligned}$$



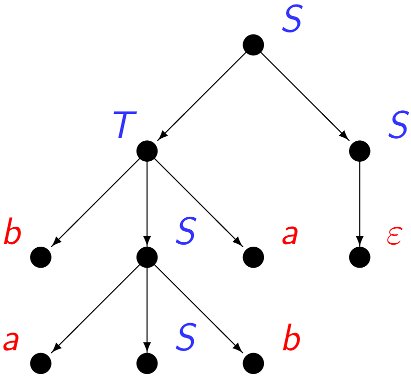
Деревья вывода для КС-грамматик

$S \to TS$
$S \to aSb$
$S \to \varepsilon$
$T \to bSa$



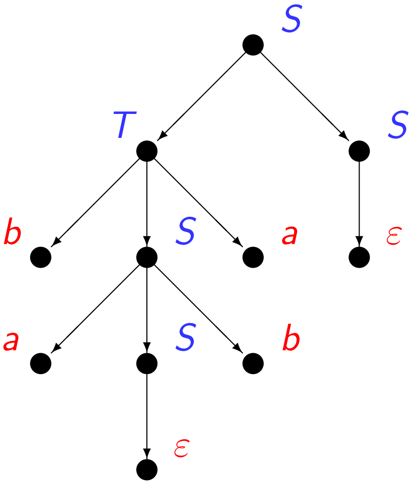
Деревья вывода для КС-грамматик

$S \to TS$
$S \to aSb$
$S \to \varepsilon$
$T \to bSa$



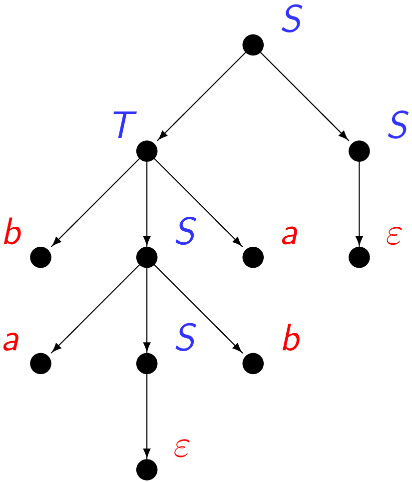
Деревья вывода для КС-грамматик

$$
\begin{aligned}
S &\to TS \\
S &\to aSb \\
S &\to \varepsilon \\
T &\to bSa
\end{aligned}
$$



ДЕРЕВЬЯ ВЫВОДА ДЛЯ КС-ГРАММАТИК

$$
\begin{aligned}
S &\to TS\\
S &\to aSb\\
S &\to \varepsilon\\
T &\to bSa
\end{aligned}
$$



Крона дерева вывода — слово, составленное из символов на листьях дерева

$w = baba$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Теорема 8.1. Пусть L — КС-язык над алфавитом Σ. Тогда существует такое положительное число m, что для любого слова w, длина $|w|$ которого превосходит m, существует такое разбиение этого слова на подслова

$$w = xuyvz,$$

что $uv \neq \varepsilon$, $|uyv| < m$, и для любого i, $i \geq 0$, верно включение

$$xu^i yv^i z \in L,$$

т.е. $xyz \in L$, $xuyvz \in L$, $xuuyvvz \in L$ и.т.д.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

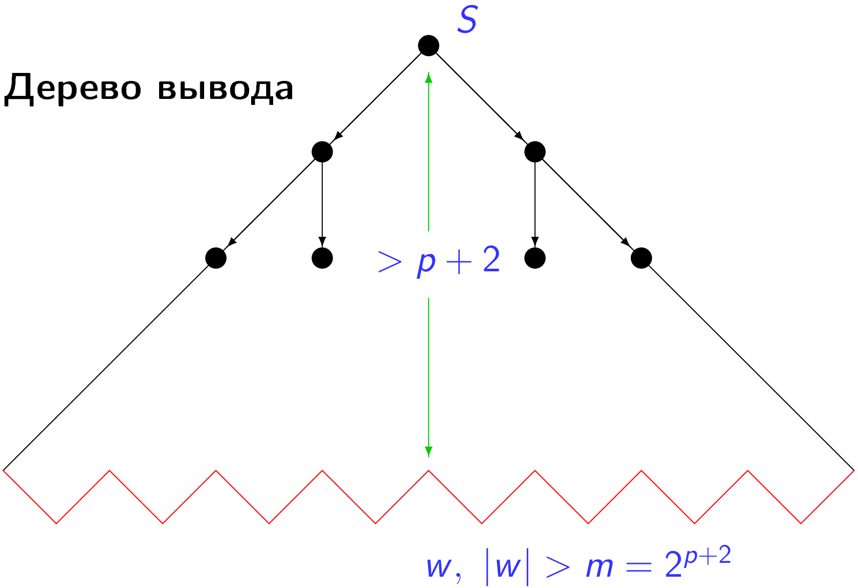
Доказательство. Если L — КС-язык, то существует КС-грамматика в нормальной форме Хомского G, порождающая этот язык. Все правила грамматики G имеют вид $S \to \varepsilon$, $N \to a$, $N \to N'N''$, и поэтому любое дерево вывода — это бинарное дерево; ветвление может отсутствовать только у вершин, потомки которых — терминалы.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Доказательство. Если L — КС-язык, то существует КС-грамматика в нормальной форме Хомского G, порождающая этот язык. Все правила грамматики G имеют вид $S \to \varepsilon$, $N \to a$, $N \to N'N''$, и поэтому любое дерево вывода — это бинарное дерево; ветвление может отсутствовать только у вершин, потомки которых — терминалы.

Обозначим символом p количество нетерминалов грамматики G. Положим $m = 2^{p+2}$. Тогда для любого слова w языка L, имеющего длину $|w| > m$, дерево его вывода для КС-грамматики G имеет высоту, превышающую величину $p + 2$.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ



ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, в этом дереве вывода есть хотя бы одна ветвь

$$S \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_p \longrightarrow a,$$

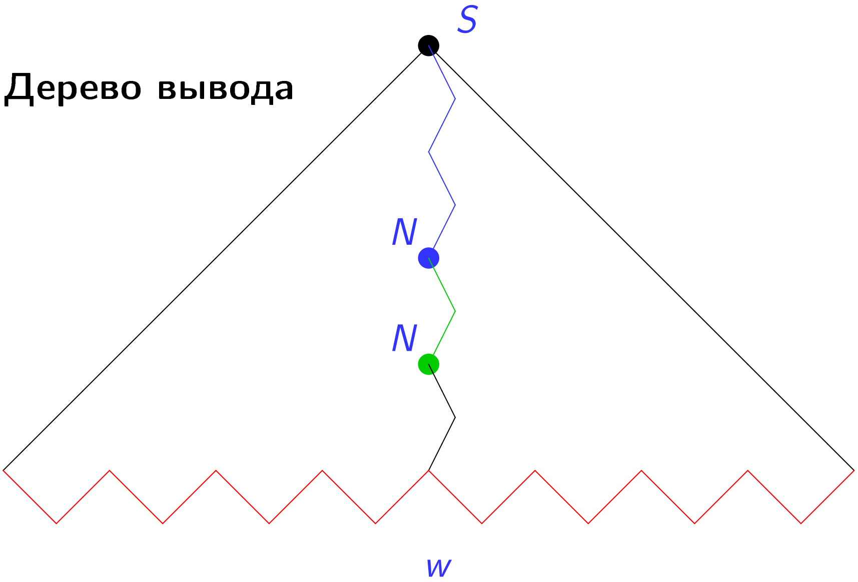
проходящая не менее чем через $p+1$ вершин-нетерминалов.

Возьмем самую длинную из таких ветвей. Хотя бы один нетерминал встречается в ней дважды.

Возьмем ту пару повторно встречающихся нетерминалов N, которые расположены наиболее близко к нижнему концу этой ветви.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Дерево вывода

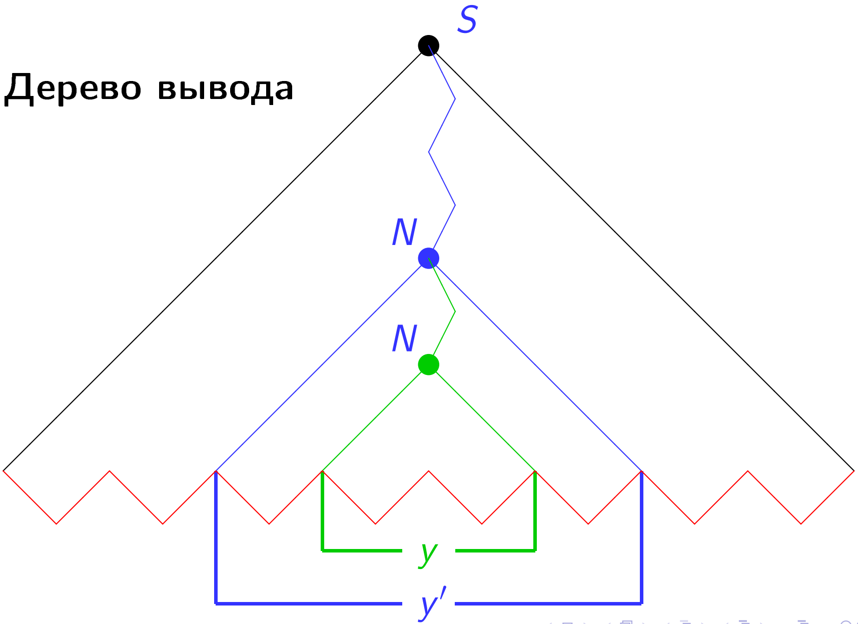


ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Рассмотрим те терминальные подслова y и y' слова w, которые выводимы в нашем дереве из этих двух самых нижних повторных вхождений одного и того же нетерминала N.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Дерево вывода



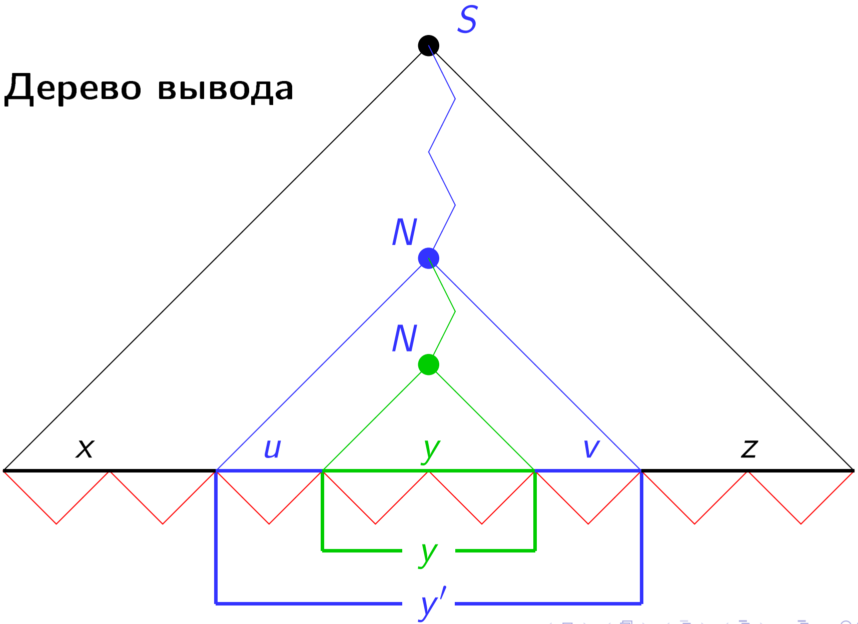
Теорема о разрастании

Тогда терминальное слово y' имеет разбиение $y' = uyv$, причем $uv \neq \varnothing$ (ведь нормальная форма Хомского не допускает ε-правил для не-начальных терминалов, и поэтому $y \neq y'$).

Кроме того, верно, что $|y'| < m$, поскольку выбраны были самые нижние повторяющиеся терминалы. За счет этого высота дерева вывода слова y' не превосходит $p + 2$.

А само терминальное слово w имеет разбиение $w = xy'z$.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ



ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Полученное разбиение свидетельствует о том, что в грамматике G выводимы следующие строки:

$$S \xrightarrow{G}_* xNz,\ S \xrightarrow{G}_* xuNvz,\ N \xrightarrow{G}_* uNv,\ N \xrightarrow{G}_* y.$$

И это означает, что в грамматике G выводимы следующие слова:

$$S \xrightarrow{G}_* xNz \xrightarrow{G}_* xyz,$$

$$S \xrightarrow{G}_* xNz \xrightarrow{G}_* \cdots \xrightarrow{G}_* x\underbrace{u\ldots u}_{i}y\underbrace{v\ldots v}_{i}z.$$

Теорема о разрастании

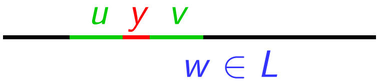
Теорема о разрастании утверждает, что если слово из КС-языка «достаточно» длинное,

$$w \in L$$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Теорема о разрастании утверждает, что если слово из КС-языка «достаточно» длинное,

то в этом слове есть такой «короткий» фрагмент,



ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Теорема о разрастании утверждает, что если слово из КС-языка «достаточно» длинное,

$w \in L$

то в этом слове есть такой «короткий» фрагмент,

$w \in L$

который можно «раздвигать» в обе стороны

$w' \in L$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Теорема о разрастании утверждает, что если слово из КС-языка «достаточно» длинное,

$$w \in L$$

то в этом слове есть такой «короткий» фрагмент,

$$u \ y \ v$$

$$w \in L$$

который можно «раздвигать» в обе стороны

$$u \ u \ u \ y \ v \ v \ v$$

$$w'' \in L$$

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Теорема о разрастании утверждает, что если слово из КС-языка «достаточно» длинное,

$$w \in L$$

то в этом слове есть такой «короткий» фрагмент,

$$u \quad y \quad v$$

$$w \in L$$

который можно «раздвигать» в обе стороны

$$u \quad u \quad u \quad u \quad y \quad v \quad v \quad v \quad v$$

$$w''' \in L$$

Теорема о разрастании

Теорема о разрастании — это необходимое условие того, что язык является контекстно-свободным.

Это условие можно использовать для доказательства того, что некоторые языки не являются контекстно-свободными.

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Теорема о разрастании — это необходимое условие того, что язык является контекстно-свободным.

Это условие можно использовать для доказательства того, что некоторые языки не являются контекстно-свободными.

Пример. Язык $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ не является контекстно-свободным.

Теорема о разрастании

Теорема о разрастании — это необходимое условие того, что язык является контекстно-свободным.

Это условие можно использовать для доказательства того, что некоторые языки не являются контекстно-свободными.

Пример. Язык $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ не является контекстно-свободным.

Доказательство проводится по стереотипной схеме. Предположим противное. Тогда существует такое m, что все слова $a^n b^n c^n$, где $n > m$ должны удовлетворять теореме о разрастании.

Теорема о разрастании

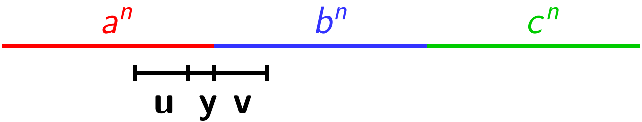
Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

a^n b^n c^n

Теорема о разрастании

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

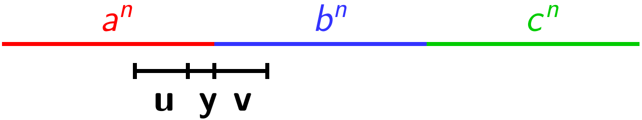
должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



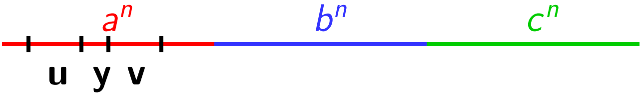
ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



Где же расположен этот фрагмент?

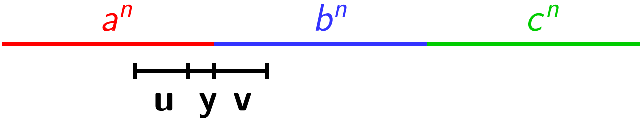


Здесь?

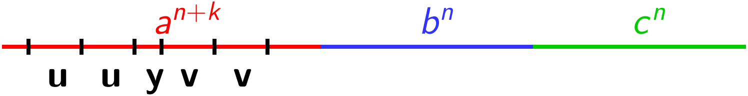
ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



Где же расположен этот фрагмент?

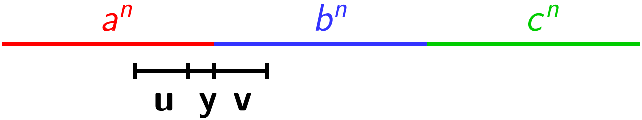


НЕТ!

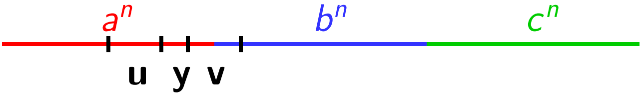
ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



Где же расположен этот фрагмент?

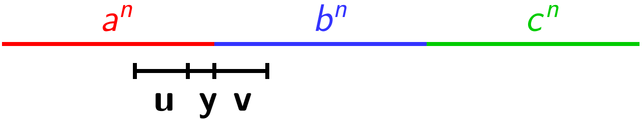


Здесь?

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



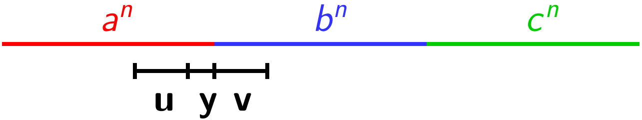
Где же расположен этот фрагмент?

НЕТ!

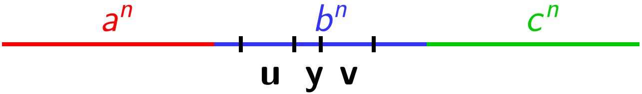
ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



Где же расположен этот фрагмент?

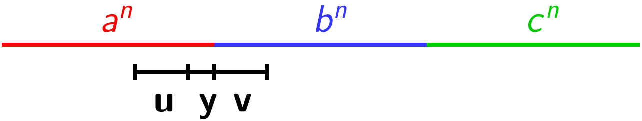


Здесь?

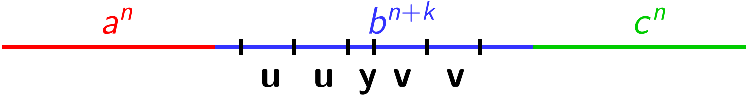
ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Значит, «достаточно» длинное слово $a^n b^n c^n$

должно содержать «короткий» фрагмент, способный «разрастаться», оставляя слово в языке.



Где же расположен этот фрагмент?



НЕТ!

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Где бы мы не выделяли такой «короткий» фрагмент, его «разрастание» выводит слово $a^n b^n c^n$ за пределы языка L.

Возникает противоречие с утверждением Теоремы 8.1 (о разрастании).

Источник противоречия — предположение о том, что язык L является контекстно-свободным. Значит, язык $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ не является контекстно-свободным. QED

ТЕОРЕМА О РАЗРАСТАНИИ

Задача 1. Докажите, что язык

$$\bar{L} = \Sigma^* \setminus \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$$

является контекстно-свободным.

Задача 2. Докажите, что язык

$$L' = \{ww : w \in \Sigma^*\}$$

не является контекстно-свободным.

Задача 3. Является ли контекстно-свободным язык

$$\bar{L}' = \Sigma^* \setminus \{ww : w \in \Sigma^*\}?$$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

А какие вычислительные устройства способны распознавать контекстно-свободные языки?

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

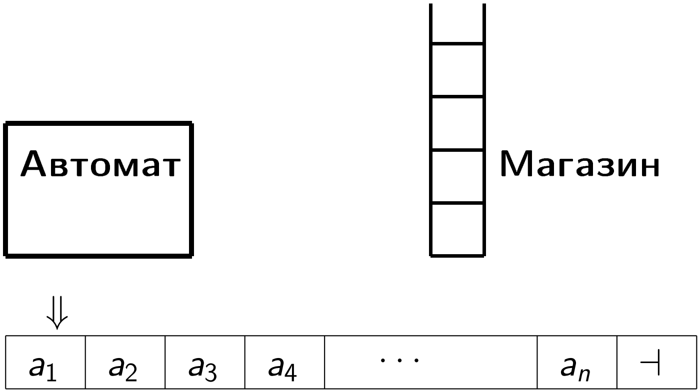
А какие вычислительные устройства способны распознавать контекстно-свободные языки?

Вычислительных возможностей конечных автоматов для этого недостаточно; их нужно усилить.

Оказывается, что для этого достаточно снабдить конечный автомат стековой (магазинной) памятью.

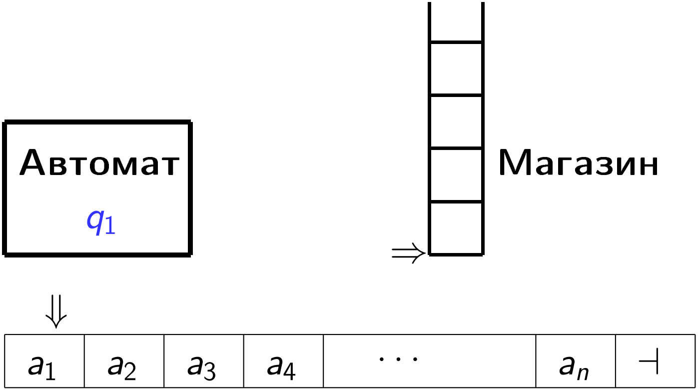
Так появилась модель вычислений магазинного автомата.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



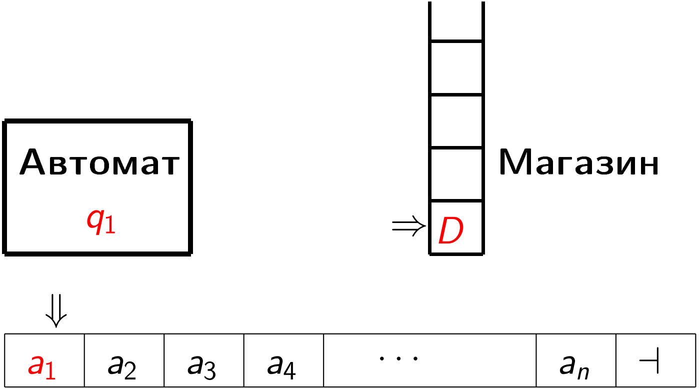
Конечный автомат снабжен дополнительной памятью — магазином (стеком)

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



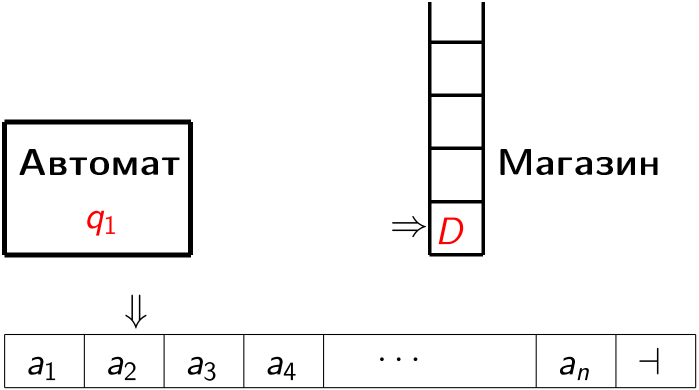
В начале работы автомат находится в начальном состоянии, а магазин пуст

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



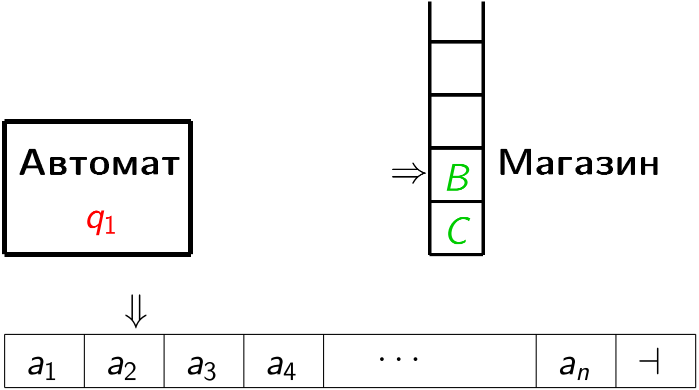
В зависимости от состояния автомата, обозреваемой буквы и символа на верхушке магазина…

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



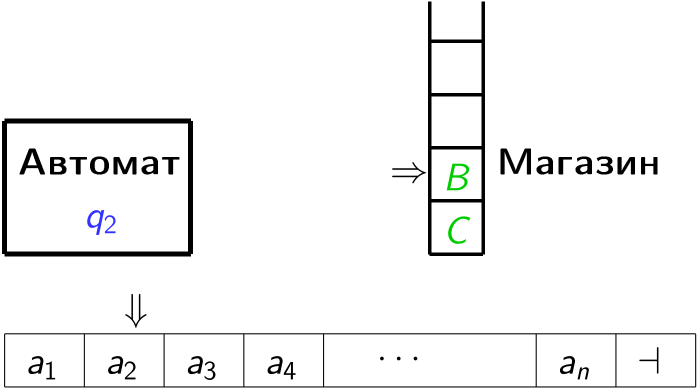
автомат может 1) перейти к прочтению следующей буквы на ленте,...

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



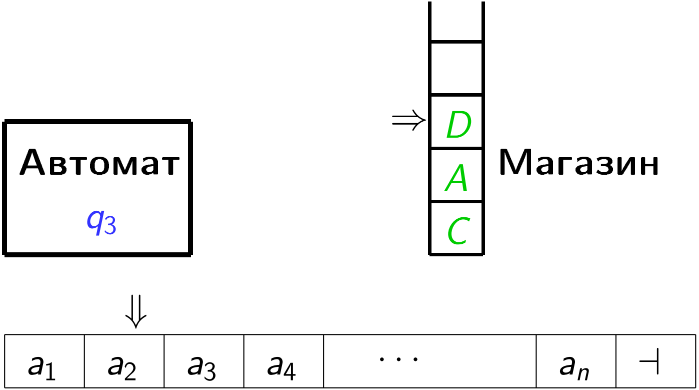
2) прочесть и стереть символ на верхушке магазина и записать несколько магазинных символов,...

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



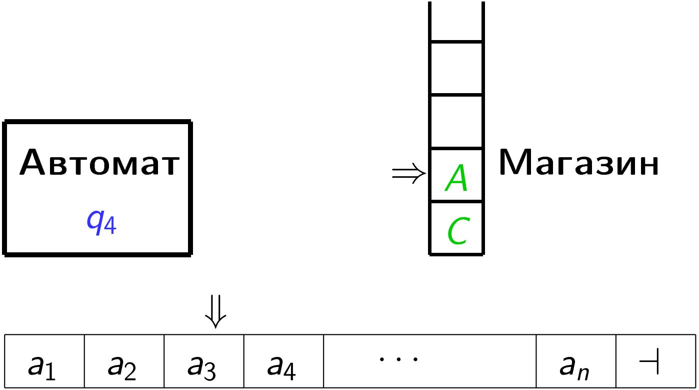
и 3) перейти в новое состояние.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



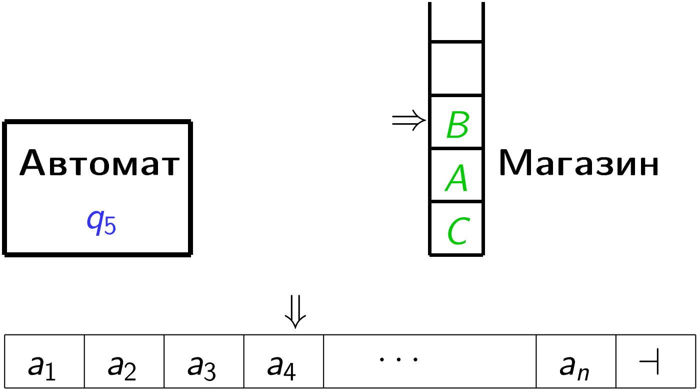
Автомат может не прочитывать очередную букву (совершает ε-переход.)

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



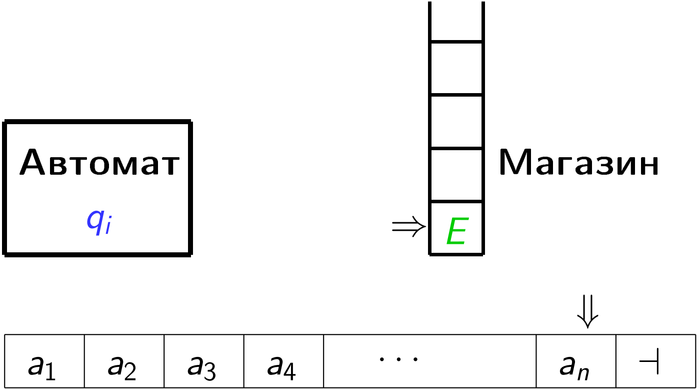
Автомат может не записывать новых символов в магазин (стирает прочитанный символ).

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



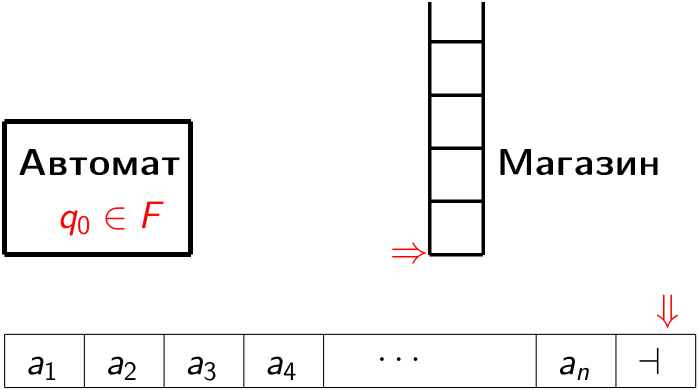
Автомат может не прочитывать и не стирать верхний символ в магазине, а записать новые символы.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



Если после прочтения последней буквы слова...

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



автомат оказывается в допускающем состоянии и магазин пуст, то считается, что автомат успешно распознал ленточное слово

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Автоматом с магазинной памятью (магазинным автоматом, стековым автоматом) называется система $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$, в которой

- Σ — конечный ленточный алфавит,
- Γ — конечный магазинный алфавит,
- Q — конечное множество состояний,
- I — подмножество начальных состояний, $I \subseteq Q$,
- F — подмножество финальных состояний, $F \subseteq Q$,
- $T \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times \Gamma^*$ — отношение переходов.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Переходы магазинного автомата можно изображать на диаграммах так:

$$q' \xrightarrow{a,\, B \,:\, CD} q''$$

Прочитывает на ленте букву a ,
прочитывает на верхушке магазина символ B ,
стирает его и записывает CD .

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Переходы магазинного автомата можно изображать на диаграммах так:

$$q' \xrightarrow{\varepsilon, B : CD} q''$$

Не читает букв на ленте,

прочитывает на верхушке магазина символ B ,

стирает его и записывает CD .

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Переходы магазинного автомата можно изображать на диаграммах так:

$$q' \xrightarrow{\;a,\varepsilon\,:\,CD\;} q''$$

Прочитывает на ленте букву a ,
не обращает внимания на верхушку магазина,
и записывает над ней CD .

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

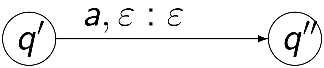
Переходы магазинного автомата можно изображать на диаграммах так:

$$q' \xrightarrow{a, B \,:\, \varepsilon} q''$$

Прочитывает на ленте букву a ,
прочитывает на верхушке магазина символ B ,
и стирает его, ничего не записывая.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Переходы магазинного автомата можно изображать на диаграммах так:

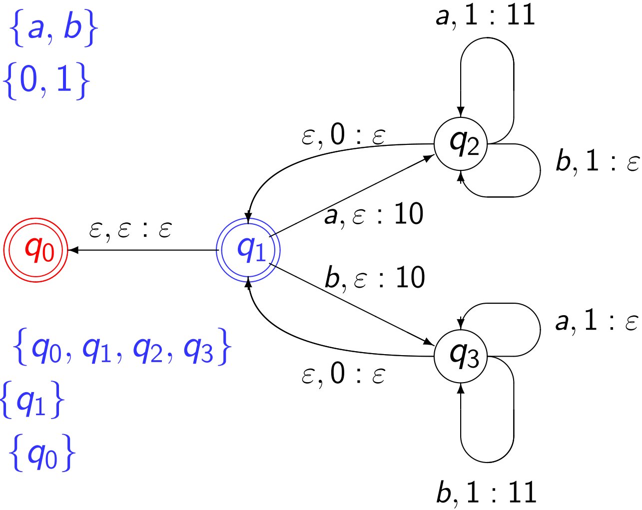


Прочитывает на ленте букву a ,
не обращает внимания на магазин,
и оставляет его без изменения.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{0, 1\}$



$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$I = \{q_1\}$

$F = \{q_0\}$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Конфигурацией магазинного автомата $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$ называется всякая пара (q, α), где $q \in Q$ (состояние, в котором находится автомат) и $\alpha \in \Gamma^*$ (содержимое магазина).

Отношение переходов T можно распространить на множество конфигураций магазинного автомата: для любой буквы или пустого слова x, пары состояний q, q', магазинного символа или пустой строки Y и строки магазинных символов α

$$(q, Y\alpha) \xrightarrow{x} (q', \beta\alpha) \iff (q, x, Y, q', \beta) \in T.$$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Вычислением магазинного автомата $\mathcal{B}$ называется всякая конечная последовательность конфигураций

$$conf_0 \xrightarrow{x_1} conf_1 \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} conf_n.$$

Говорят, что это вычисление прочитывает слово $w = x_1 x_2 \ldots x_n$; для обозначения такого вычисления используется запись $conf_0 \xrightarrow{w}_* conf_n$.

Вычисление называется

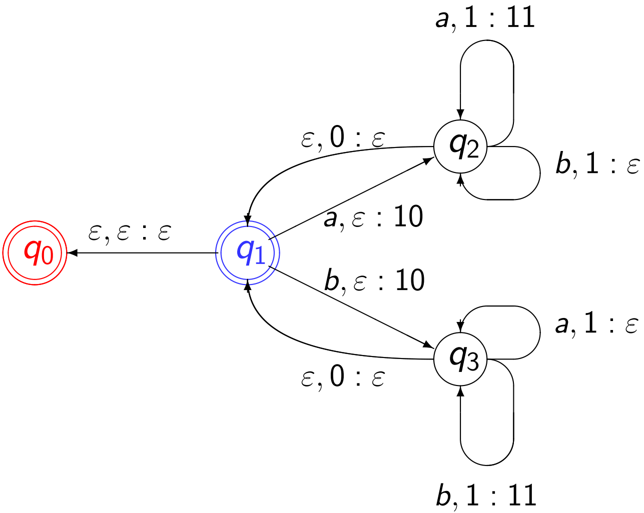
- начальным, если $conf_0 = (q_1, \varepsilon)$, где $q_1 \in I$;
- финальным, если $conf_n = (q_0, \varepsilon)$, где $q_0 \in F$;
- успешным, если оно является начальным и финальным.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Язык магазинного автомата $\mathcal{B}$ — это множество $L(\mathcal{B})$ всех слов w, для которых существует успешное вычисление $conf_0 \xrightarrow{w}_* conf_n$.

Два магазинных автомата $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ называются эквивалентными, если $L(\mathcal{B}_1) = L(\mathcal{B}_2)$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



$L(\mathcal{B}) = \{w : w \in \{a, b\}^*,$ кратности вхождения a и b равны $\}$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Теорема 8.2. Любой КС-язык распознается некоторым магазинным автоматом.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Теорема 8.2. Любой КС-язык распознается некоторым магазинным автоматом.

Доказательство. Возьмем произвольный КС-язык. Согласно теореме 7.18 этот язык порождается грамматикой в нормальной форме Хомского $G = (\Sigma, \mathcal{N}, P, S)$. Этой грамматике соответствует магазинный автомат $\mathcal{B}_G = (\Sigma, \mathcal{N}, \{q_1, q_0\}, \{q_1\}, \{q_0\}, T)$ со следующим отношением переходов:

1. в T содержится переход $(q_1, \varepsilon, \varepsilon, q_0, S) \in T$,
2. если $S \to \varepsilon \in P$, то $(q_0, \varepsilon, S, q_0, \varepsilon) \in T$,
3. если $A \to BC \in P$, то $(q_0, \varepsilon, A, q_0, BC) \in T$,
4. если $A \to a \in P$, то $(q_0, a, A, q_0, \varepsilon) \in T$.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Индукцией по длине грамматического вывода (или вычисления автомата) можно показать, что успешное вычисление магазинного автомата $\mathcal{B}_G$

$$(q_1, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon} (q_0, S) \xrightarrow{x_1} (q_0, \alpha_1) \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} (q_0, \varepsilon),$$

прочитывающее слово $w = x_1 x_2 \dots x_n$, существует тогда и только тогда, когда существует успешный левосторонний вывод

$$S \xrightarrow{G} x_1\alpha_1 \xrightarrow{G} x_1x_2\alpha_2 \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} x_1x_2x_3 \dots x_n,$$

этого же слова в грамматике G .

QED

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Утверждение 8.3. Для любого магазинного автомата $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$ существует эквивалентный ему магазинный автомат $\mathcal{B}' = (\Sigma, \Gamma, Q', I, F, T')$, у которого $|I| = |F| = 1$, и для любого перехода $(q', x, Y, q'', \alpha) \in T'$ выполняется неравенство $|Y| + |\alpha| \leq 1$.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Утверждение 8.3. Для любого магазинного автомата $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$ существует эквивалентный ему магазинный автомат $\mathcal{B}' = (\Sigma, \Gamma, Q', I, F, T')$, у которого $|I| = |F| = 1$, и для любого перехода $(q', x, Y, q'', \alpha) \in T'$ выполняется неравенство $|Y| + |\alpha| \leq 1$.

Доказательство. Любой переход $(q', y, A, q'', B_1 B_2 \dots B_k) \in T$ можно заменить множеством переходов

$$(q', y, A, q_1, \varepsilon), (q_1, \varepsilon, \varepsilon, q_2, B_1), \dots, (q_k, \varepsilon, \varepsilon, q'', B_k)$$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Утверждение 8.3. Для любого магазинного автомата $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$ существует эквивалентный ему магазинный автомат $\mathcal{B}' = (\Sigma, \Gamma, Q', I, F, T')$, у которого $|I| = |F| = 1$, и для любого перехода $(q', x, Y, q'', \alpha) \in T'$ выполняется неравенство $|Y| + |\alpha| \leq 1$.

Доказательство. Любой переход $(q', y, A, q'', B_1 B_2 \dots B_k) \in T$ можно заменить множеством переходов

$$(q', y, A, q_1, \varepsilon), (q_1, \varepsilon, \varepsilon, q_2, B_1), \dots, (q_k, \varepsilon, \varepsilon, q'', B_k)$$

А как добиться выполнения требования $|I| = |F| = 1$ придумайте самостоятельно. QED

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Магазинные автоматы обладают свойством монотонности по отношению к магазину.

Утверждение 8.4. Для любого магазинного автомата $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$ если существует вычисление

$$(p, \alpha) \xrightarrow{w}_{*} (q, \beta),$$

то для любой строки магазинных символов γ существует вычисление

$$(p, \alpha\gamma) \xrightarrow{w}_{*} (q, \beta\gamma).$$

Доказательство. Самостоятельно.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Теорема 8.5. Любой магазинный автомат распознает КС-язык.

Теорема 8.5. Любой магазинный автомат распознает КС-язык.

Доказательство. Согласно Утверждению 8.3 достаточно ограничиться рассмотрением только магазинных автоматов $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_1, q_0, T)$, в которых каждый переход (q', x, Y, q'', α) удовлетворяет неравенству $|Y| + |\alpha| \leq 1$.

Соответствующая этому автомату КС-грамматика $G_{\mathcal{B}} = (\Sigma, \mathcal{N}, P, S)$ устроена так.

Магазинные автоматы

Множество нетерминалов $\mathcal{N} = \{N_{p,q} : p, q \in Q\}$,
начальный нетерминал — $S = N_{q_1,q_0}$.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Множество нетерминалов $\mathcal{N} = \{N_{p,q} : p, q \in Q\}$,
начальный нетерминал — $S = N_{q_1,q_0}$.

Множество грамматических правил состоит из всех возможных правил вида

- $N_{q,q} \to \varepsilon$ для всех $q \in Q$;
- $N_{p,q} \to xN_{r,q}$ для всех переходов $(p, x, \varepsilon, r, \varepsilon)$, где $p, q, r \in Q$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
- $N_{p,q} \to xN_{r,s}yN_{t,q}$ для всех пар переходов $(p, x, \varepsilon, r, Y)$ и $(s, y, Y, t, \varepsilon)$, где $p, q, r, s, t \in Q$, $x, y \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Y \in \Gamma$.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Правило грамматического вывода

$$N_{p,q} \to xN_{r,s}yN_{t,q}$$

имеет следующее истолкование.

Если магазинный автомат имеет переход $(p, x, \varepsilon, r, Y)$ с наращиванием магазина, то любое вычисление $(p, \varepsilon) \xrightarrow{w}_* (q, \varepsilon)$, начинающееся этим переходом можно разбить на 4 части:

$$(p, \varepsilon) \xrightarrow{x} (r, Y) \xrightarrow{u}_* (s, Y) \xrightarrow{y} (t, \varepsilon) \xrightarrow{v}_* (q, \varepsilon) .$$

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Индукцией по длине вычисления (грамматического вывода) с применением Утверждения 8.4 можно показать, что для любых состояний $p, q \in Q$ и для любого слова w автомат $\mathcal{B}$ имеет вычисление $(p, \varepsilon) \xrightarrow{w}_{*} (q, \varepsilon)$ в том и только том случае, если в грамматике $G_{\mathcal{B}}$ есть вывод $N_{p,q} \xrightarrow{G}_{*} w$.

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Индукцией по длине вычисления (грамматического вывода) с применением Утверждения 8.4 можно показать, что для любых состояний $p, q \in Q$ и для любого слова w автомат $\mathcal{B}$ имеет вычисление $(p, \varepsilon) \xrightarrow{w}_* (q, \varepsilon)$ в том и только том случае, если в грамматике $G_{\mathcal{B}}$ есть вывод $N_{p,q} \xrightarrow{G}_* w$.

Отсюда следует, что $L(\mathcal{B}) = L(G_{\mathcal{B}})$.

QED

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Недетерминированные автоматы не имеют прикладной ценности: их невозможно реализовать. Поэтому целесообразно рассмотреть детерминированный вариант магазинного автомата.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Недетерминированные автоматы не имеют прикладной ценности: их невозможно реализовать. Поэтому целесообразно рассмотреть детерминированный вариант магазинного автомата.

Магазинный автомат $\mathcal{B} = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, T)$ называется детерминированным, если для любой пары переходов $(q', x', Y', p', \alpha')$ и $(q'', x'', Y'', p'', \alpha'')$ выполняется хотя бы одно из трех требований:

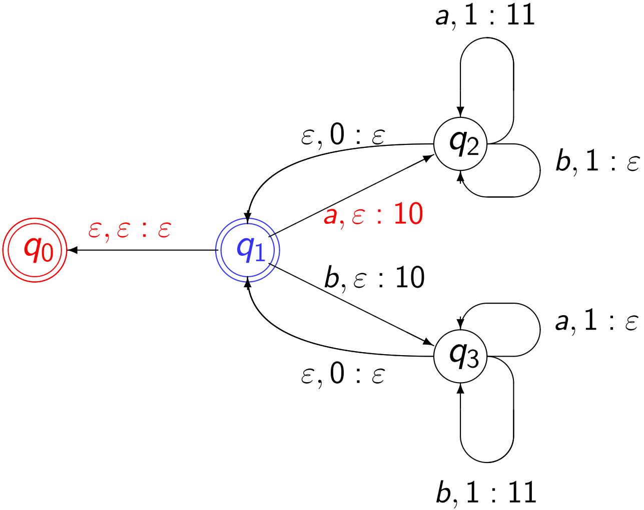
1. $q' \neq q''$,
2. $x' \notin Pref(x'')$ и $x'' \notin Pref(x')$,
3. $Y' \notin Pref(Y'')$ и $Y'' \notin Pref(Y')$.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Детерминированность магазинного автомата $\mathcal{B}$ означает, что для любой конфигурации (q, α) существует не более одного перехода этого автомата, применимого к этой конфигурации.

Таким образом, для любого слова w детерминированный магазинный автомат $\mathcal{B}$ имеет не более одного начального вычисления (успешного или неуспешного) на слове w .

МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ



Недетерминированный автомат

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Чтобы распознавать слова, детерминированному автомату нужно знать, где заканчивается слово.

Поэтому будем предполагать, что каждое слово имеет на конце граничный маркер $\dashv, \dashv \notin \Sigma$.

Детерминированный автомат $\mathcal{B} = (\Sigma \cup \{\dashv\}, \Gamma, Q, I, F, T)$ распознает язык $L, L \subseteq \Sigma^*$, если $L(\mathcal{B}) = \{w \dashv : w \in L\}$.

Пример. КС-язык $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ является детерминированным КС-языком.
Докажите, что язык $\{a, b\}^* \setminus L$ также является детерминированным КС-языком.

Детерминированные магазинные автоматы

Перспектива автоматического построения синтаксических анализаторов КС-языков:

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Перспектива автоматического построения синтаксических анализаторов КС-языков:

1. Опишем синтаксис языка при помощи КС-грамматик (формул Бэкуса-Наура).

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Перспектива автоматического построения синтаксических анализаторов КС-языков:

1. Опишем синтаксис языка при помощи КС-грамматик (формул Бэкуса-Наура).
2. Для заданной граматики построим соответствующий магазинный автомат.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Перспектива автоматического построения синтаксических анализаторов КС-языков:

1. Опишем синтаксис языка при помощи КС-грамматик (формул Бэкуса-Наура).
2. Для заданной граматики построим соответствующий магазинный автомат.
3. Детерминизируем этот магазинный автомат.

Детерминированные магазинные автоматы

Перспектива автоматического построения синтаксических анализаторов КС-языков:

1. Опишем синтаксис языка при помощи КС-грамматик (формул Бэкуса-Наура).
2. Для заданной грамматики построим соответствующий магазинный автомат.
3. Детерминизируем этот магазинный автомат.
4. Минимизируем полученный детерминированный магазинный автомат.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАГАЗИННЫЕ АВТОМАТЫ

Перспектива автоматического построения синтаксических анализаторов КС-языков:

1. Опишем синтаксис языка при помощи КС-грамматик (формул Бэкуса-Наура).
2. Для заданной грамматики построим соответствующий магазинный автомат.
3. Детерминизируем этот магазинный автомат.
4. Минимизируем полученный детерминированный магазинный автомат.

Как решить задачи 3 и 4?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 8