Основы кибернетики

Автор: С. А. Ложкин

Лектор: доцент Д. С. Романов

Часть 2. Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления. Эквивалентные преобразования управляющих систем

§ 1. Основные понятия из теории графов, сетей, схем. Свойства матриц достижимости сетей

Понятие графа, которое обобщает понятие бинарного отношения (см. §1 главы 1), часто используется для описания структурных моделей, связанных с вычислениями, представлениями или реализациями дискретных функций. Напомним основные понятия и обозначения из теории графов, сетей и схем, а также сформулируем некоторые известные результаты.

Пару (V, E), где E — сочетание (с возможными повторениями) над множеством упорядоченных и неупорядоченных пар из V, будем, как обычно, называть *графом с множеством вершин* $V = V(G)$ *и множеством ребер* $E = E(G)$. При этом длина сочетания E считается числом ребер графа G и обозначается через $|E|$. Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются *ориентированными ребрами* или, иначе, *дугами* (соответственно *неориентированными ребрами*), одинаковые пары — *параллельными ребрами* (*дугами*), дуги, отличающиеся порядком вершин, — *противоположными дугами*, а пары из совпадающих вершин — *петлями*. Граф из ориентированных (неориентированных) ребер считается *ориентированным* (соответственно *неориентированным*). Заметим, что бинарное отношение представляет собой ориентированный граф без параллельных дуг. При этом симметричное антирефлексивное отношение можно рассматривать как неориентированный граф без параллельных ребер и петель.

Будем говорить, что ориентированное (неориентированное) ребро *инцидентно* составляющим его вершинам, а дуга (u, v) *исходит* или, иначе, *выходит* из вершины u и *заходит* или, иначе, *входит* в вершину v. Число ребер, инцидентных вершине v (входящих в v, выходящих из v) в графе G, называется *степенью* (соответственно *полустепенью захода*, *полустепенью исхода*) вершины v в графе G и обозначается через $d_G(v)$ (соответственно $d_G^+(v)$, $d_G^-(v)$). Заметим, что

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 |E(G)|, \tag{1.1}$$

и что $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$ $(d_G(v) = d_G^+(v) = d_G^-(v))$ в случае ориентированного (соответственно неориентированного) графа G.

Вершина v называется *изолированной вершиной* (*стоком*, *истоком*) графа G, если $d_G(v) = 0$ (соответственно $d_G^-(v) = 0$, $d_G^+(v) = 0$). Ориентированный граф G называется r-ичным (строго r-ичным) графом, если $d_G^+(v) \leqslant r$ (соответственно $d_G^+(v) = r$) для любой отличной от истока вершины v, $v \in V(G)$.

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом G' считается *подграфом графа* G*, натянутым на множество вершин* V', если E' включает в себя все входящие в E пары вершин из V'. Подграф, содержащий все вершины исходного графа, называется его *остовным подграфом*. Легко видеть, что подграф всегда можно получить из исходного графа в результате (многократного) применения операций *удаления ребра* или *удаления вершины*. При этом удаление вершины, как обычно, подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер.

При определении понятий, связанных с «движениями» по графу, ограничимся случаем ориентированных графов, считая, как обычно, что неориентированное ребро эквивалентно двум противоположным дугам, связанным с той же парой вершин. Последовательность C, состоящая из ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ при всех i, $i \in [1, n]$, называется $(v_1 - v_{n+1})$-*путем* графа G. При этом вершина v_1 (v_{n+1}) считается *начальной* (соответственно *конечной*) вершиной этого пути, вершины $v_2, \ldots, v_n$ — его *внутренними* вершинами, а число n — его *длиной*. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется *цепью*, а если, кроме того, различны все его вершины, то — *простой цепью*. Если начальная и конечная вершины пути (цепи) C совпадают, то C считается *замкнутым путем* (соответственно *циклом*). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется *простым циклом*.

Будем говорить, что *вершина* u *достижима из вершины* v *в графе* G, где $u, v \in V(G)$, если $u = v$ или в G существует $(v - u)$-цепь. Заметим, что отношение достижимости вершин графа G является рефлексивным и транзитивным, а если G — неориентированный граф, то и симметричным. Следовательно, множество вершин графа G распадается на классы эквивалентности по отношению их достижимости в графе $\widehat{G}$, который получается из графа G заменой каждой дуги на соответствующее неориентированное ребро ($G = \widehat{G}$, если G — неориентированный граф). При этом подграф графа G, натянутый на каждый такой класс вершин, называется *связной компонентой* графа G, а множество всех его связных компонент обозначается через $c(G)$. Граф G называется *связным*, если $|c(G)| = 1$.

Напомним, что

$$|E(G)| - |V(G)| + |c(G)| \geqslant 0 \tag{1.2}$$

и что левая часть (1.2) называется *цикломатическим числом* графа G. Напомним также, что это число равно максимальному числу линейно независимых относительно операции симметрической разности[1] остовных подграфов графа G, состоящих из одного простого цикла и изолированных вершин.

[1] Под симметрической разностью графов G_1 и G_2 понимается граф G, для которого

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2),$$
$$E(G) = (E(G_1) \cup E(G_2)) \setminus (E(G_1) \cap E(G_2)).$$

Множество S, которое состоит из ребер графа $G = (V, E)$ и обладает тем свойством, что вершина u, $u \in V$, достижима из вершины v, $v \in V$, в графе G, но не достижима из нее в графе $(V, E \setminus S)$, называется $(u|v)$-*сечением* графа G. Легко видеть, что любая $(u - v)$-цепь графа G имеет хотя бы одно общее ребро с любым $(u|v)$-сечением этого графа. Сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечением, называется *тупиковым*.

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется *ациклическим*. Заметим, что в ориентированном ациклическом графе G всегда есть как стоки, так и истоки. При этом для каждой его вершины v можно определить ее *глубину* (соответственно *исходящую глубину*), как максимальную длину $(u - v)$-путей (соответственно $(v - u)$-путей) графа G, где u — один из истоков (соответственно стоков) G. Легко видеть, что отношение достижимости является отношением частичного порядка на множестве вершин ориентированного ациклического графа и обратно.

Неориентированный связный ациклический граф называется *деревом*. Для дерева G, как известно, имеет место равенство

$$|E(G)| = |V(G)| - 1. \tag{1.3}$$

Дерево с выделенной вершиной (*корнем*) называется *корневым деревом*, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его *листьями*. Ориентированный граф, который получается из корневого дерева заменой каждого его неориентированного ребра на соответствующую дугу, «направленную» к корню, называется *ориентированным деревом*.

Дерево (ориентированное дерево) $\mathcal{D}$, являющееся остовным подграфом графа G, называется его *остовным поддеревом*, а дерево $\mathcal{D}'$, получающееся из $\mathcal{D}$ в результате присоединения «конечной» вершины любого не вошедшего в $\mathcal{D}$ ребра графа G к той же вершине $\mathcal{D}$, которая была его конечной вершиной в G, и объявления начальной вершины этого ребра листом — *остовным наддеревом* графа G. Очевидно, что при этом граф G может быть получен из дерева $\mathcal{D}'$ в результате присоединения некоторых вершин степени 1 (листьев) к другим его вершинам. Заметим, что любой неориентированный связный граф, а также любой ориентированный ациклический граф с 1 стоком всегда имеют остовные поддеревья и наддеревья соответствующего типа.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается *помеченным графом*. Примером такого графа является, в частности, корневое дерево. Другим примером помеченного графа является ациклический граф с *монотонной нумерацией вершин*, когда для любой дуги номер вершины, из которой она исходит, больше номера вершины, в которую эта дуга входит. Ориентированный граф G называется *упорядоченным*, если для любой его вершины v, $v \in V(G)$, все ребра, входящие в v, упорядочены и пронумерованы числами $1, 2, \ldots, d_G^+(v)$.

Будем считать, что ребра и вершины остовного поддерева, а также ребра связанного с ним остовного наддерева помеченного графа имеют те же самые пометки, которые они имели в исходном графе. Это означает, в частности, что остовное наддерево ориентированного ациклического упорядоченного графа является упорядоченным.
Графы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются *изоморфными*, если существуют такие взаимно однозначные отображения $\varphi : V' \to V''$ и $\psi : E' \to E''$, при которых вершины и неориентированные ребра (дуги) G' переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги) G'' с сохранением отношения инцидентности (соответственно исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок. Для (конечного) множества графов $\mathcal{G}$ через $|\mathcal{G}|$ будем обозначать число попарно неизоморфных графов в $\mathcal{G}$.

Известно, что

$$|\mathfrak{D}(q)| \leqslant 4^q, \tag{1.4}$$

где $\mathfrak{D}(q)$ — множество упорядоченных ориентированных корневых деревьев с не более, чем q ребрами.

Введем теперь общие определения и обозначения, связанные с сетями и «абстрактными» схемами, с реализацией ими функций, а также с некоторыми структурными представлениями схем.

Набор вида $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, где G — граф, а V' и V'' — выборки из множества $V(G)$ длины p и q соответственно, причем выборка V' является выборкой без повторений, называется (p, q)*-сетью*. При этом выборка V' (выборка V'') считается *входной* (соответственно *выходной*) *выборкой*, а ее i-я вершина называется i*-м входным* (соответственно *выходным*) *полюсом* или, иначе, i*-м входом* (соответственно *выходом*) сети $\mathcal{G}$. Вершины, не участвующие во входной и выходной выборках сети, считаются ее *внутренними* вершинами.

Для того чтобы выделить входную и выходную выборки сети $\mathcal{G} = (G; V', V'')$, будем записывать ее в виде $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V'; V'')$ или $\mathcal{G} = G(V'; V'')$. Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не совпадают), называется *сетью с неразделенными* (соответственно *с разделенными*) *полюсами*. При этом в случае неразделенных полюсов сеть $\mathcal{G} = (G; V; V) = \mathcal{G}(V; V)$ будем записывать в виде $\mathcal{G} = (G; V) = \mathcal{G}(V)$. Как правило, входы и выходы (полюса) сети имеют специальные пометки, которые отличают эти вершины от других вершин сети и указываются вместо них в соответствующих выборках. Таким образом, сети можно считать специальным частным случаем помеченных графов.

Примером сети является корневое дерево, входами которого считаются его листья, а выходом — корень. При этом порядок листьев во входной выборке ориентированного упорядоченного корневого дерева $\mathcal{D}$ задается «естественной» нумерацией τ, отображающей множество вершин дерева $\mathcal{D}$ в $\mathbb{N}$ так, что $\tau(v') < \tau(v'')$ тогда и только тогда, когда либо v'' достижима из v', либо $k' < k''$, где k' и k'' — номера дуг, по которым цепи, соединяющие вершины v' и v'' соответственно с корнем $\mathcal{D}$, входят в свою первую общую вершину.

Для произвольных выборок $V' = \left(v_1', \ldots, v_p'\right)$ и $V'' = \left(v_1'', \ldots, v_q''\right)$ из множества $V(G)$ графа G определим *матрицу достижимости выборки* V' *из выборки* V'' как матрицу M, $M \in B^{p,q}$, для которой

$$M\langle i,j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j'' \text{ достижима из } v_i', \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в случае $V' = V''$ матрица M является рефлексивной и транзитивной[1], а если, кроме того, G — неориентированный граф, то и симметричной матрицей.

[1] Матрица M, $M \in B^{m,m}$, считается рефлексивной (транзитивной) тогда и только тогда, когда она задает рефлексивное (соответственно транзитивное) отношение на множестве $[1, m]$, то есть

$$M\langle i,i\rangle = 1 \quad (\text{соответственно } M\langle i,t\rangle \cdot M\langle t,j\rangle \leqslant M\langle i,j\rangle)$$

для любого i (соответственно любых i, j и t) из отрезка $[1, m]$.

Заметим также, что транзитивность рефлексивной матрицы M, $M \in B^{m,m}$, имеет место тогда и только тогда, когда[1]

$$M^2 = M. \tag{1.5}$$

[1] Считаем, что при умножении матриц из 0 и 1 вместо операции сложения используется операция дизъюнкции.

Действительно, полагая $\widehat{M} = M^2$, получим

$$\widehat{M}\left\langle i,j\right\rangle = \bigvee_{t=1}^{m} M\left\langle i,t\right\rangle \cdot M\left\langle t,j\right\rangle \tag{1.6}$$

и, следовательно, в случае $\widehat{M} = M$ неравенства транзитивности

$$\widehat{M}\left\langle i,j\right\rangle = M\left\langle i,j\right\rangle \geqslant M\left\langle i,t\right\rangle \cdot M\left\langle t,j\right\rangle$$

будут выполнены при любых i, j, t из отрезка $[1, m]$. С другой стороны, из транзитивности рефлексивной матрицы M, в силу (1.6), следует, что

$$\widehat{M}\left\langle i,j\right\rangle = M\left\langle i,j\right\rangle \vee \left(\bigvee_{\substack{1\leqslant t\leqslant m \\ t\neq i,j}} M\left\langle i,t\right\rangle \cdot M\left\langle t,j\right\rangle \right) = M\left\langle i,j\right\rangle.$$

Матрица достижимости выходной выборки сети из ее входной выборки называется *матрицей достижимости* этой сети.

Под «абстрактной» схемой понимается сеть, часть пометок которой составляют входные переменные и в каждой вершине которой реализуется функция (столбец из функций) от этих переменных. При этом считается, что сама схема реализует систему (матрицу), состоящую из функций (соответственно столбцов функций), реализованных на ее выходах. В качестве выходных пометок схемы используются, как правило, специальные выходные переменные, а схема Σ с входными переменными (входами) $x_1, \ldots, x_n$ и выходными переменными $z_1, \ldots, z_m$ записывается в виде $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$.

Номер $\nu(\alpha)$ набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из B^n считается *номером* ЭК (ЭД) ранга n от БП $X\,(n)$ вида $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ (соответственно $x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}$), множество всех таких ФАЛ обозначается Q_n (соответственно J_n), а система из всех указанных ФАЛ, упорядоченных по их номерам, называется *конъюнктивным* (соответственно *дизъюнктивным*) *дешифратором порядка* n от БП $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается через $\overrightarrow{Q_n}$ (соответственно $\overrightarrow{J_n}$).

Функция вида

$$\mu_n(x_1,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_{2^n-1}) = \bigvee_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)}$$

называется *мультиплексорной функцией*, или, иначе, *мультиплексором порядка* n, а переменные $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ($y=(y_0,\ldots,y_{2^n-1})$) считаются *адресными* (соответственно *информационными*) БП мультиплексора μ_n.

Мультиплексорную ФАЛ порядка $(n-q)$, $0 \leqslant q < n$, от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ и информационных БП $y = (y_0, \ldots, y_{2^{n-q}-1})$ часто используют для разложения произвольной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ по БП x'' (см. разложение Шеннона (2.5) из §2 главы 1).

Схему, которая реализует систему ФАЛ Q_n $(J_n,\, \mu_n)$ будем называть *дешифратором* (соответственно *дизъюнктивным дешифратором*, *мультиплексором*) *порядка* n. Схемы, реализующие равные системы функций, называются *эквивалентными*. Предполагается, что изоморфные схемы всегда эквивалентны, и поэтому для любого конечного множества схем $\mathcal{U}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}\| \leqslant |\mathcal{U}|\,, \tag{1.7}$$

где $\|\mathcal{U}\|$ — число попарно неэквивалентных схем в $\mathcal{U}$.

§2. Формулы, их структура, эквивалентность и способы задания. Оптимизация подобных формул по глубине

В §1 главы 1 дано индуктивное определение формулы и реализуемой ею функции. Напомним его и рассмотрим способ представления формул алгебры логики с помощью ориентированных упорядоченных деревьев.

Пусть, по-прежнему, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть Б $=$ $= \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i, $i = 1, \ldots, b$, зависит от k_i, $k_i \geqslant 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geqslant 2$. Предполагается, что Б — полный базис (см. §1 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Любая переменная x_j из $\mathcal{X}$ считается *формулой глубины* 0 или, иначе, *тривиальной формулой над базисом* Б, которая реализует функцию x_j. Если $i \in [1, b]$ и для каждого j, $j \in [1, k_i]$, определена формула $\mathcal{F}_j$ глубины q_j над Б, которая реализует ФАЛ f_j, то запись $\mathcal{F}$ вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i\left(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}\right) \tag{2.1}$$

является *формулой глубины* q *над* Б, где

$$q = \max\left\{q_1, \ldots, q_{k_i}\right\} + 1, \tag{2.2}$$

которая реализует функцию f вида $f = \varphi_i\left(f_1, \ldots, f_{k_i}\right)$. Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над базисом* Б. При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы $\mathcal{F}$, называются ее *подформулами*, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула $\mathcal{F}$ вида (2.1), считаются ее *главными* подформулами.

Заметим, что запись подформулы $\mathcal{F}'$ формулы $\mathcal{F}$ является частью записи $\mathcal{F}$, причём каждая такая часть считается *вхождением* $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$ или, иначе, *позиционной подформулой вида* $\mathcal{F}'$ формулы $\mathcal{F}$, а число указанных частей называется *кратностью* $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$. Под *сложностью* (*рангом*) формулы $\mathcal{F}$ понимается число вхождений в нее функциональных символов (соответственно символов переменных), которое обозначается через $L(\mathcal{F})$ (соответственно $R(\mathcal{F})$).

Напомним, что «графически» совпадающие формулы считаются *изоморфными*, а формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, реализующие равные функции f' и f'', называются *равными* или, иначе, *эквивалентными*. При этом равенство вида $t: \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается *тождеством*. Через t_{φ}^{K} и t_{φ}^{A} будем обозначать тождество коммутативности и тождество ассоциативности для ФАЛ $\varphi(x_1, x_2)$, где $\varphi \in \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$ (см. §2 главы 1).

Множество всех формул над базисом Б будем обозначать через $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$ и положим $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}_0} = \mathcal{U}^{\Phi}$. Индукцией по глубине любой формуле глубины q над Б можно сопоставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины q, каждому листу которого приписана БП из $\mathcal{X}$, а каждой внутренней вершине — функциональный символ (ФС) из Б. Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j (см. рис. 2.1a). Формуле $\mathcal{F}$ вида (2.1) сопоставим дерево $\mathcal{D}$ глубины q, определяемой равенством (2.2), и с корнем v, показанное на рис. 2.1b, где $\mathcal{D}_j$, $j = 1, \ldots, k_i$ — дерево глубины q_j с корнем v_j, которое соответствует формуле $\mathcal{F}_j$.

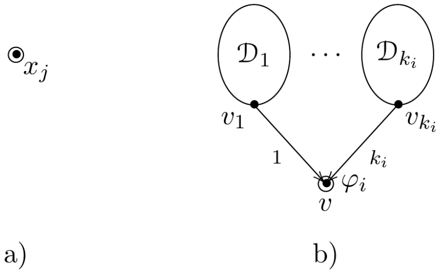


Рис. 2.1: представление формулы деревом

Заметим, что формула $\mathcal{F}$ по сопоставленному ей дереву $\mathcal{D}$ восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма, и что при этом поддеревья дерева $\mathcal{D}$ взаимно однозначно сопоставляются позиционным подформулам формулы $\mathcal{F}$. На рис. 2.2а показано дерево, соответствующее формуле

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3\,(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2)\,, \qquad (2.3)$$

которая является формулой глубины 4 над базисом Б_0 и реализует ФАЛ $s_3^{\{0,2,3\}}$.

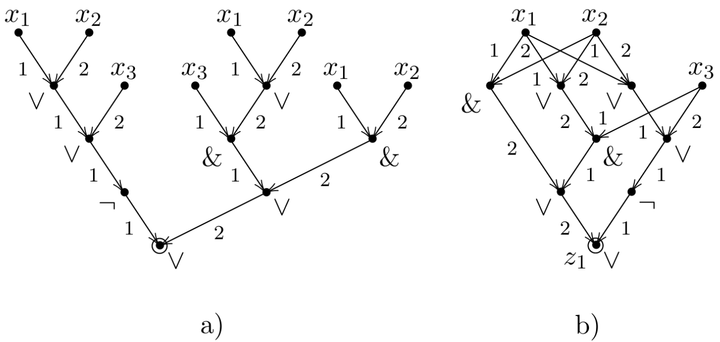


Рис. 2.2: представление формулы (2.3) деревом и квазидеревом

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2)$$

Для удобства будем считать, что в $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$ входят не только отдельные формулы, но и упорядоченные системы (наборы) формул над базисом Б, что каждая такая система реализует набор, состоящий из ФАЛ, реализуемых ее формулами, и что этой системе формул соответствует система из деревьев, сопоставленных ее формулам.

Заметим, что ранг $R(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ равен числу листьев связанного с ней дерева $\mathcal{D}$, ее сложность $L(\mathcal{F})$ равна числу остальных вершин $\mathcal{D}$, а ее глубина $D(\mathcal{F})$ — глубине его корня. Заметим также, что порядок вхождения БП в запись формулы $\mathcal{F}$ при ее просмотре слева направо соответствует последовательности появления БП на листьях связанного с ней дерева, просматриваемых в «естественном» порядке.

Рассмотрим теперь некоторые соотношения между параметрами формул над базисом $Б_0$. Заметим, что представляя формулы деревьями, такие соотношения можно доказывать более простым и наглядным способом.

Лемма 2.1

Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leqslant L(\mathcal{F}) + 1 \leqslant 2^{D(\mathcal{F})}, \qquad (2.4)$$

где $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ — число ФС & и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Доказательство.

Сравнивая число ребер, входящих в вершины дерева (формулы) $\mathcal{F}$ с числом ребер, выходящих из его вершин, получим

$$|E(\mathcal{F})| = 2L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + L_{\neg}(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F}) + R(\mathcal{F}) - 1,$$

где $L_{\neg}(\mathcal{F})$ — число ФС $\neg$ в формуле $\mathcal{F}$, откуда следует, что

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1.$$

Второе из соотношений (2.4) легко устанавливается индукцией по $D(\mathcal{F})$.
Лемма доказана. $\square$

Следствие

$$D(\mathfrak{F}) \geqslant \lceil \log (L(\mathfrak{F}) + 1) \rceil . \tag{2.5}$$

Для того чтобы выделить набор $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, который состоит из всех различных БП алфавита $\mathcal{X}$, встречающихся в формуле $\mathcal{F}$ и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. При этом формулу, которая получается из $\mathcal{F}$ в результате замены каждого вхождения БП x_{i_j}, $j = 1, \ldots, n$, формулой $\mathcal{F}_j$ будем считать *результатом подстановки формулы* $\mathcal{F}_j$ *вместо БП* x_{i_j}, $j = 1, \ldots, n$, *в формулу* $\mathcal{F}$ и будем обозначать ее через $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$. Заметим, что формула $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ реализует ФАЛ $f(f_1, \ldots, f_n)$, где ФАЛ f (ФАЛ f_j) — ФАЛ, реализуемая формулой $\mathcal{F}$ (соответственно $\mathcal{F}_j$, $j = 1, \ldots, n$).

Отсюда следует, что если указанную подстановку применить к обеим частям тождества $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(x)$ и $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(x)$, мы получим тождество

$$\widehat{t} : \ \widehat{\mathcal{F}}' = \widehat{\mathcal{F}}'',$$

где $\widehat{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ и $\widehat{\mathcal{F}}'' = \mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$, которое называется *подстановкой для тождества* t.

Из определений следует, что для формул имеет место так называемый принцип эквивалентной замены. Это означает, что если позиционную подформулу вида $\widehat{\mathcal{F}'}$ (вида $\widehat{\mathcal{F}''}$) формулы $\mathcal{F}$ заменить, учитывая тождество $\widehat{t}$, эквивалентной ей формулой $\widehat{\mathcal{F}''}$ (соответственно $\widehat{\mathcal{F}'}$), то полученная в результате такой замены формула $\check{\mathcal{F}}$ будет эквивалентна формуле $\mathcal{F}$. Указанный переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\check{\mathcal{F}}$ называется (однократным) *эквивалентным преобразованием (ЭП) формулы* $\mathcal{F}$ на основе тождества t, а последовательность однократных ЭП формулы $\mathcal{F}$, выполняемых на основе тождеств из системы τ, считается её (многократным) ЭП на основе этой системы.

Формулы из $\mathcal{U}^{\Phi}$, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств $t_{\&}^{\text{K}}$ и $t_{\vee}^{\text{K}}$, а также тождеств $t_{\&}^{\text{A}}$ и $t_{\vee}^{\text{A}}$, называются *подобными*. Легко видеть, что подобные формулы получаются друг из друга перестановкой аргументов и изменением порядка выполнения однотипных двуместных базисных операций, образующих соответствующую многоместную операцию, и поэтому могут отличаться друг от друга только глубиной. Заметим, что сложность характеризует время вычисления формулы на одном процессоре, а глубина — время ее параллельного вычисления на неограниченном числе процессоров. Поэтому оптимизация подобных формул по глубине является частным случаем «распараллеливания» вычислений.

Формулы из $\mathcal{U}^{\Phi}$ можно оптимизировать также по числу отрицаний с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств

$$t^{\mathrm{M}}_{\&} : \overline{(x_1 \cdot x_2)} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2, \qquad t^{\mathrm{M}}_{\vee} : \overline{(x_1 \vee x_2)} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2,$$

$$t^{\mathrm{M}}_{\neg} : \overline{(\overline{x}_1)} = x_1$$

— тождеств де Моргана для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания соответственно, а также преобразований подобия. Тождество $t^{\mathrm{M}}_{\neg}$ используется при этом для устранения нескольких последовательных вхождений ФС $\neg$ в оптимизируемой формуле, а тождества $t^{\mathrm{M}}_{\&}$, $t^{\mathrm{M}}_{\vee}$ — для выполнения перехода

$$\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{F}}_1 \circ \cdots \circ \overline{\mathcal{F}}_t = (\overline{\mathcal{F}_1 \diamond \cdots \diamond \mathcal{F}_t}),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$ и $t \geqslant 2$, во всех ее максимальных по включению подформулах вида $\mathcal{F}'$, формируемых с помощью преобразований подобия.

Формула, в которой все ФС $\neg$ встречаются только над БП, называется *формулой с поднятыми отрицаниями*. Легко видеть, что с помощью тождеств де Моргана любую формулу из $\mathcal{U}^{\Phi}$ можно преобразовать в формулу с поднятыми отрицаниями. Заметим, что преобразования подобия и эквивалентные преобразования формул на основе тождеств де Моргана не изменяют ранг этих формул и, следовательно, число ФС $\{\&, \vee\}$ в них.

Определим альтернирование Alt $(\mathfrak{F})$ формулы $\mathfrak{F}$ с поднятыми отрицаниями как максимальное число изменений типов ФС & и $\vee$ в цепях дерева, соответствующего формуле $\mathfrak{F}$. Заметим, что альтернирование ЭК или ЭД равно нулю, а альтернирование любой (отличной от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ равно 1.

Теорема 2.1

Для любой формулы $\mathfrak{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathfrak{U}^{\Phi}$ существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{F}}$ такая,что

$$D\left(\check{\mathfrak{F}}\right) \leqslant \lceil \log\left(L\left(\mathfrak{F}\right)+1\right)\rceil + \mathrm{Alt}\ \left(\mathfrak{F}\right). \qquad (2.6)$$

Доказательство

Доказательство проведем индукцией по рангу формулы $\mathcal{F}$.
Если $R(\mathcal{F}) = 1$, то формула $\mathcal{F}$ имеет вид $\mathcal{F} = x_i^{\sigma}$, $\sigma \in B$, и сама удовлетворяет неравенству (2.6).
Пусть неравенство (2.6) справедливо для любой подформулы $\mathcal{F}'$ такой, что $R(\mathcal{F}') \leqslant r - 1$, где $r \geqslant 2$, и пусть формула $\mathcal{F}$ имеет ранг r и альтернирование a. Представим формулу $\mathcal{F}$ в виде:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t),$$

где $t \geqslant 2$, формула $\Phi(y_1, \ldots, y_t)$ при некотором $\circ$, $\circ \in \{\&, \vee\}$, имеет вид $y_1 \circ \ldots \circ y_t$, альтернирование подформул $\mathcal{F}_1, \ldots$
$\ldots, \mathcal{F}_t$ формулы $\mathcal{F}$ не больше, чем a', где
$a' = \max\{0, (a-1)\}$, а их ранг не превосходит $(r-1)$.

Продолжение доказательства

Положим

$$d = \lceil \log \left(L \left(\mathfrak{F} \right) + 1 \right) \rceil + a - a' \quad \text{и} \quad d_i = \lceil \log \left(L \left(\mathfrak{F}_i \right) + 1 \right) \rceil ,$$

где $i = 1, \ldots, t$, а затем для каждой формулы $\mathfrak{F}_i$ построим по индуктивному предположению подобную ей формулу $\check{\mathfrak{F}}_i$ такую, что

$$D \left(\check{\mathfrak{F}}_i \right) \leqslant d_i + a'.$$

Заметим, что при этом

$$\sum_{i=1}^{t} 2^{d_i} \leqslant 2^d. \tag{2.7}$$

Продолжение доказательства

Действительно, если $a - a' = 1$, то

$$2^d \geqslant 2\left(L\left(\mathcal{F}\right)+1\right) = \sum_{i=1}^{t} 2\left(L\left(\mathcal{F}_i\right)+1\right) \geqslant \sum_{i=1}^{t} 2^{d_i},$$

а если $a = a' = 0$, то $\mathcal{F} = x_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ x_t^{\sigma_t}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{t} 2^{d_i} = \sum_{i=1}^{t} \left(L\left(x_i^{\sigma_i}\right)+1\right) = L\left(\mathcal{F}\right)+1 \leqslant 2^d.$$

Продолжение доказательства

Заметим также,что перенумерацией формул $\check{\mathfrak{F}}_i$, $i = 1, \dots, t$, можно добиться выполнения неравенств:

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \dots \geqslant d_t. \tag{2.8}$$

Пусть теперь Φ' — формула вида $y_1 \circ \dots \circ y_{2^d}$, которой соответствует полное двоичное d-ярусное дерево, а формула Φ'' получается из Φ' удалением последних q, где $q = \left(2^d - 2^{d_1} - \dots - 2^{d_t}\right)$ и $q \geqslant 0$ в силу (2.7), вхождений БП вместе с теми ФС, которые с ними связаны.

Продолжение доказательства

В силу (2.8) первые 2^{d_1} вхождений БП в Φ'' составляют подформулу Φ_1, которой соответствует полное двоичное d_1-ярусное дерево, содержащее 2^{d_1} вхождений БП в Φ'', следующие 2^{d_2} вхождений БП в Φ'' — подформулу Φ_2, которой соответствует полное двоичное d_2-ярусное дерево, и так далее, вплоть до последних 2^{d_t} вхождений БП в Φ'', составляющих подформулу Φ_t, которой соответствует полное двоичное d_t-ярусное дерево.
Обозначим через $\check{\mathcal{F}}$ формулу, которая получается из Φ'' заменой подформулы Φ_i на формулу $\check{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, \ldots, t$.
Заметим, что $\check{\mathcal{F}}$ подобна $\mathcal{F}$, имеет глубину не больше,чем

$$d + a' = \lceil \log (L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a,$$

и поэтому удовлетворяет неравенству (2.6).
Теорема доказана. $\square$

Следствие 1

Для любой ЭК или ЭД K существует подобная формула $\check{K}$ такая, что

$$D\left(\check{K}\right) = \left\lceil \log\left(L(K)+1\right)\right\rceil, \qquad (2.9)$$

которая, в силу леммы 2.1, минимальна по глубине.

Следствие 2

Для любой ДНФ или КНФ $\mathfrak{A}$ существует подобная ей формула $\breve{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D\left(\breve{\mathfrak{A}}\right) \leqslant \lceil \log\left(L\left(\mathfrak{A}\right)+1\right)\rceil + 1.$$

Замечание

Доказательство теоремы дает индуктивный метод оптимизации формул с поднятыми отрицаниями по глубине с помощью преобразований подобия.

§3. Задача эквивалентных преобразований схем на примере формул. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем, играют важную роль при решении различных задач теории управляющих систем и, в частности, задачи синтеза схем (см. §1 главы 3). Изложим ряд вопросов ЭП схем из основных классов и рассмотрим сначала понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями схем на основе тождеств на примере формул над базисом Б. Напомним, что некоторые ЭП формул базиса $Б_0$ уже использовались для раскрытия скобок и приведения подобных при построении сокращенной ДНФ (см. §3 главы 1), а также при оптимизации формул по глубине (см. §2).

Однократное ЭП формулы $\mathcal{F}$ в формулу $\check{\mathcal{F}}$ с помощью тождества t (см. §2) будем записывать в виде однократной выводимости вида $\mathcal{F} \underset{t}{\mapsto} \check{\mathcal{F}}$. Аналогичное ЭП $\mathcal{F}$ в $\widetilde{\mathcal{F}}$ в результате применения одного из тождеств системы τ (нескольких последовательных применений тождеств из τ) будем записывать в виде однократной (соответственно кратной) выводимости вида $\mathcal{F} \underset{\tau}{\mapsto} \widetilde{\mathcal{F}}$ (соответственно $\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}}$).

При этом считается, что тождество

$$\widetilde{t}:\ \mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств τ, и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto \widetilde{t}$ или $\tau \models\!\Rightarrow \widetilde{t}$ в зависимости от числа использованных переходов. Заметим, что в силу обратимости ЭП из выводимости $\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}}$ следует обратная выводимость $\widetilde{\mathcal{F}} \underset{\tau}{\models\!\Rightarrow} \mathcal{F}$.

Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над Б, если для любых двух эквивалентных формул $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ над Б имеет место выводимость $\mathcal{F}' \underset{\tau}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}''$.

Рассмотрим, в частности, систему τ, которая состоит из тождеств де Моргана и тождества

$$t_{1,\&}^{\text{ПК}}: \; x_1 \, (x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1,$$

— тождества подстановки константы $1 = x_2 \vee \overline{x}_2$ в конъюнкцию (см. тождества (2.2) из главы 1). Пример ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с помощью системы тождеств τ дает следующая цепочка выводимостей:

$$x_1 \, (x_2 x_3 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \underset{t_{\&}^{\text{M}}}{\mapsto} x_1 \, (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \underset{t_{1,\&}^{\text{ПК}}}{\mapsto} x_1. \tag{3.1}$$

Далее будем рассматривать только формулы над базисом $Б_0$, называя их просто формулами. Заметим, что имеют место следующие тождества ассоциативности

$$t_{\circ}^{\mathrm{A}}: \; x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

тождества коммутативности

$$t_{\circ}^{\mathrm{K}}: \; x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_2$$

и тождества отождествления БП

$$t_{\circ}^{\mathrm{ОП}}: \; x \circ x = x,$$

где $\circ \in \{\&, \vee\}$, тождества дистрибутивности «$\circ$» относительно «$\diamond$»

$$t_{\circ,\diamond}^{\mathrm{D}}: \; x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

и тождества («правила») де Моргана

$$t_{\neg}^{\mathrm{M}}: \; \overline{(\overline{x}_1)} = x_1, \quad t_{\circ}^{\mathrm{M}}: \; \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\overline{x}_1) \diamond (\overline{x}_2),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$,

тождества подстановки констант[1]

$$t^{\text{ПК}}_{0,\&} : x_1\,(x_2 \cdot \overline{x}_2) = x_2 \cdot \overline{x}_2, \quad t^{\text{ПК}}_{1,\&} : x_1\,(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1,$$

$$t^{\text{ПК}}_{0,\vee} : x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_2 = x_1, \qquad t^{\text{ПК}}_{1,\vee} : x_1 \vee (x_2 \vee \overline{x}_2) = x_2 \vee \overline{x}_2,$$

а также тождество поглощения

$$t^{\text{П}} :\ x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{ОС}} :\ x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

[1] В отличие от тождеств (2.1)–(2.2) главы 1 данные тождества подстановки констант ориентированы на базис Б_0, где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида $x_i \cdot \overline{x}_i$ (соответственно $x_i \vee \overline{x}_i$).

Докажем, что

$$\left\{t^{\mathrm{M}}_{\&},\, t^{\mathrm{M}}_{\neg}\right\} \models\!\!\Rightarrow \left\{t^{\mathrm{M}}_{\vee}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{t^{\mathrm{K}}_{\&},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\Rightarrow \left\{t^{\mathrm{K}}_{\vee}\right\},$$

где $\tau^{\mathrm{M}} = \left\{t^{\mathrm{M}}_{\&},\, t^{\mathrm{M}}_{\neg},\, t^{\mathrm{M}}_{\vee}\right\}$. Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \underset{t^{\mathrm{M}}_{\neg}}{\models\!\!\Rightarrow} \overline{\left(\overline{\overline{x}}_1\right) \vee \left(\overline{\overline{x}}_2\right)} \underset{t^{\mathrm{M}}_{\&}}{\mapsto} \overline{\overline{\left(\overline{x}_1\right) \cdot \left(\overline{x}_2\right)}} \underset{t^{\mathrm{M}}_{\neg}}{\mapsto} \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$$

и

$$x_1 \vee x_2 \underset{t^{\mathrm{M}}_{\neg}}{\mapsto} \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \underset{t^{\mathrm{M}}_{\vee}}{\mapsto} \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} \underset{t^{\mathrm{K}}_{\&}}{\mapsto} \overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1} \underset{t^{\mathrm{M}}_{\&},\, t^{\mathrm{M}}_{\neg}}{\models\!\!\Rightarrow} x_2 \vee x_1.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\left\{t_{\&}^{\mathrm{A}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\Rightarrow \left\{t_{\vee}^{\mathrm{A}}\right\},\ \left\{t_{\&}^{\mathrm{О\Pi}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\Rightarrow \left\{t_{\vee}^{\mathrm{О\Pi}}\right\},$$
$$\left\{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\Rightarrow \left\{t_{\vee,\&}^{\mathrm{D}}\right\} \text{ и } \left\{t_{\sigma,\&}^{\Pi\mathrm{K}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\Rightarrow \left\{t_{\overline{\sigma},\vee}^{\Pi\mathrm{K}}\right\},$$

где $\sigma \in \{0,1\}$. Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\left\{t_{1,\&}^{\Pi\mathrm{K}},\, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}},\, t_{\vee}^{\mathrm{A}},\, t_{\vee}^{\mathrm{K}},\, t_{\vee}^{\mathrm{О\Pi}}\right\} \models\!\!\Rightarrow t^{\Pi}.$$

Действительно,

$$x_1 \vee x_1 x_2 \underset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x_1 (x_2 \vee \overline{x}_2) \vee x_1 x_2 \underset{t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\mapsto} x_1 ((x_2 \vee \overline{x}_2) \vee x_2)$$

$$\underset{t^{\text{А}}_{\vee}, t^{\text{К}}_{\vee}}{\models\!\!\!\Rightarrow} x_1 ((x_2 \vee x_2) \vee \overline{x}_2) \underset{t^{\text{ОП}}_{\vee}}{\mapsto} x_1 (x_2 \vee \overline{x}_2) \underset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x_1.$$

Положим

$$
\begin{aligned}
\tau^{\text{осн}} &= \{t_{\&}^{\text{M}},\, t_{\neg}^{\text{M}},\, t_{\&}^{\text{A}},\, t_{\&}^{\text{K}},\, t_{\&}^{\text{ОП}},\, t_{\&,\vee}^{\text{D}},\, t_{1,\&}^{\text{ПК}},\, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\}\,,\\
\tau^{\text{A}} &= \{t_{\&}^{\text{A}},\, t_{\vee}^{\text{A}}\}\,,\\
\tau^{\text{K}} &= \{t_{\&}^{\text{K}},\, t_{\vee}^{\text{K}}\}\,,\\
\tau^{\text{ОП}} &= \{t_{\&}^{\text{ОП}},\, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}\,,\\
\tau^{\text{D}} &= \{t_{\&,\vee}^{\text{D}},\, t_{\vee,\&}^{\text{D}}\}\,,\\
\tau^{\text{ПК}} &= \{t_{0,\&}^{\text{ПК}},\, t_{1,\&}^{\text{ПК}},\, t_{0,\vee}^{\text{ПК}},\, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\}\,,\\
\widetilde{\tau}^{\text{осн}} &= \{\tau^{\text{M}},\, \tau^{\text{A}},\, \tau^{\text{K}},\, \tau^{\text{ОП}},\, \tau^{\text{D}},\, \tau^{\text{ПК}},\, t^{\text{П}}\}\,.
\end{aligned}
$$

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*.

Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

Лемма 3.1

Система $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу $x_1\overline{x}_1$. Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП.

Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной* ЭК (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — обобщенной ДНФ (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot \overline{x}_1$ будем считать *канонической* ОЭК (соответственно *канонической* ОДНФ), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot \overline{x}_1$ — *совершенными* ОДНФ. Напомним, что формула, в которой все ФС $\neg$ применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС $\neg$, называется формулой с поднятыми отрицаниями.

Пусть формула $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ реализует ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\tau^{\text{М}}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}' \underset{\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee}, t^{\text{K}}_{\&}\right\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}'' \underset{\tau^{\text{ПП}}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}} \underset{\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee}, \tau^{\text{ПП}}\right\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}}, \qquad (3.2)$$

где $\tau^{\text{ПП}} = \left\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, t^{\text{П}}\right\}$, $\mathcal{F}'$ — формула с поднятыми отрицаниями, $\mathcal{F}''$ — обобщенная ДНФ, а $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ — каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ f соответственно.

Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от $\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}'$ в (3.2) можно осуществить применением тождеств $t_{\neg}^{\mathrm{M}}$, $t_{\&}^{\mathrm{M}}$ и $t_{\vee}^{\mathrm{M}}$ к подформулам вида $\overline{\overline{(\mathcal{F}_1)}}$, $\overline{(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)}$ и $\overline{(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)}$ соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от $\mathcal{F}'$ к $\mathcal{F}''$ в (3.2), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств $\left\{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}\right\}$ к подформулам вида $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ или $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$ до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от $\mathcal{F}''$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ в (3.2), который называется *приведением подобных*, выполняется в три этапа. На первом этапе каждая ОЭК K'' из ОДНФ $\mathcal{F}''$ преобразуется в каноническую ОЭК K с помощью тождеств $\left\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^{\text{А}}, t_{\&}^{\text{К}}\right\}$, а также тождества

$$x_i \cdot \overline{x}_i = x_1 \cdot \overline{x}_1, \qquad (3.3)$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \overline{x}_i \underset{t_{0,\&}^{\text{ПК}}}{\mapsto} (x_1 \cdot \overline{x}_1) \cdot (x_i \cdot \overline{x}_i) \underset{t_{\&}^{\text{К}}}{\mapsto} (x_i \cdot \overline{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \overline{x}_1) \underset{t_{0,\&}^{\text{ПК}}}{\mapsto} x_1 \cdot \overline{x}_1.$$

На втором этапе полученная формула $\check{\mathfrak{F}}$ преобразуется в $\widehat{\mathfrak{F}}$ путем «устранения» повторных вхождений равных элементарных конъюнкций или подформул $x_1 \cdot \overline{x}_1$ с помощью тождеств $\left\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\right\}$ и, в случае $f \not\equiv 0$, последующего «устранения» ОЭК $x_1 \cdot \overline{x}_1$ с помощью тождеств $\left\{t_{\vee}^{\text{А}}, t_{\vee}^{\text{К}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}\right\}$.

Заметим, что первые два этапа приведения подобных, на которых происходит приведение повторений БП в ОЭК и ЭК, уже дают нам искомую формулу $\widehat{\mathcal{F}}$. Однако, для уменьшения числа шагов в последующих ЭП можно выполнить третий этап приведения подобных — этап приведения поглощений ЭК. На каждом шаге этого этапа в полученной ДНФ с помощью тождеств $\left\{\tau^{\mathrm{A}}, \tau^{\mathrm{K}}\right\}$ выделяется подформула вида $K'' \vee K'' \cdot K$, где K'' и K — некоторые ЭК, а затем ЭК $K'' \cdot K$ «устраняется» с помощью ЭП

$$K'' \vee K'' \cdot K \underset{t^{\Pi}}{\mapsto} K''.$$

Заметим также, что раскрытие скобок и различные этапы приведения подобных можно чередовать друг с другом при ЭП подформул формулы $\mathcal{F}'$ или формул $\mathcal{F}''$, $\widehat{\mathcal{F}}$.

Переход от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\widetilde{\mathcal{F}}$ в (3.2) выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК $\widehat{K}$ из $\widehat{\mathcal{F}}$, которая имеет ранг r, где $r = n - q < n$, и не содержит букв БП $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$, приводится к ее совершенной ДНФ $\widetilde{K}$ от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\widehat{K} \underset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\models\!\!\Rightarrow} \widehat{K}\left(x_{i_1} \vee \overline{x}_{i_1}\right) \cdots \left(x_{i_q} \vee \overline{x}_{i_q}\right) \underset{t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\models\!\!\Rightarrow} \widetilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от $\check{\mathcal{F}}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$, и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3.2

Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{осн}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Рассмотрим описанные выше ЭП на примере формулы

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot (x_2 \vee x_3)\,,$$

для которой

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &\underset{t^{\mathrm{M}}_{\&}}{\mapsto} (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3) && = \mathcal{F}',\\
\mathcal{F}' &\underset{\left\{t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee}, \tau^{\Pi\Pi} \setminus t^{\Pi}\right\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \overline{x}_3 && = \check{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}},\\
\widehat{\mathcal{F}} &\underset{\{\tau^{\mathrm{A}}, \tau^{\mathrm{K}}, t^{\Pi}\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 && = \widehat{\mathcal{F}}',\\
\widehat{\mathcal{F}}' &\underset{\left\{t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee}, \tau^{\Pi\Pi}\right\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 && = \widetilde{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Теорема 3.1

Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ f' и f'' соответственно, а набор $x(n) = x$ содержит все различные БП, встречающиеся в $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$. Пусть, далее, ФАЛ $f(x)$ равна f' и f'', а $\widetilde{\mathcal{F}}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$. В силу леммы 3.2, имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \underset{\tau^{\text{осн}}}{\models\!\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}} \underset{\tau^{\text{осн}}}{\models\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему. $\square$

§4. Задание формул графами, схемы из функциональных элементов. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с формулами модель — модель схем из функциональных элементов (СФЭ), в которой последовательность операций суперпозиции базисных ФАЛ задается с помощью ориентированного ациклического графа, обобщающего дерево, и где возможно многократное использование промежуточных результатов. По существу СФЭ получается из системы деревьев (системы формул) в результате отождествления некоторых изоморфных поддеревьев (совпадающих подформул).

Пусть $\mathcal{Z}$ — счетный упорядоченный алфавит (выходных) БП, который не имеет общих БП с алфавитом $\mathcal{X}$. Сопоставим каждому функциональному символу (ФС) φ_i, $i = 1, \ldots, b$, функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$, имеющий k_i входов, причем входу с номером j соответствует j-я БП x_j ФАЛ φ_i, где $j = 1, \ldots, k_i$, и один выход, на котором эта ФАЛ реализуется (см. рис. 4.1a). Упрощенный вариант изображения ФЭ $\mathcal{E}_i$ в виде вершины графа с пометкой φ_i, в которую входят k_i упорядоченных, то есть пронумерованных числами $1, \ldots, k_i$ дуг, показан на рис. 4.1b. При этом предполагается, что дуга с номером j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, соответствует j-му входу ФЭ $\mathcal{E}_i$. В дальнейшем мы, как правило, не будем делать различий между функциональным символом φ_i и функциональным элементом $\mathcal{E}_i$.

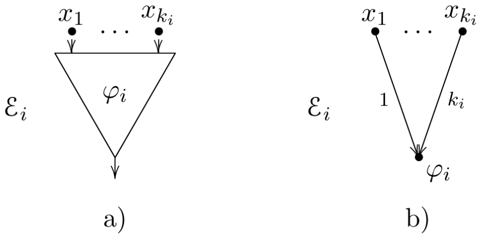


Рис. 4.1: функциональный элемент $\mathcal{E}_i$

Определение

Схемой из функциональных элементов над базисом Б называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ, входная выборка которой состоит из всех истоков Σ, а вершины помечены следующим образом:
каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из $\mathcal{X}$ (соответственно $\mathcal{Z}$), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;
каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i, где $k_i = d_{\Sigma}^{+}(v)$.

Заметим, что в общем случае вершины в выходной выборке СФЭ могут повторяться, то есть одной и той же выходной вершине может быть сопоставлено несколько БП из $\mathcal{Z}$. Если множество $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ $(Z = \{z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}\})$ состоит из всех входных (соответственно выходных) БП СФЭ Σ, перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавите $\mathcal{X}$ (соответственно $\mathcal{Z}$), то будем записывать СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(X; Z)$ или $\Sigma = \Sigma(x; z)$, где $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_m})$ — наборы БП, соответствующие множествам X и Z.

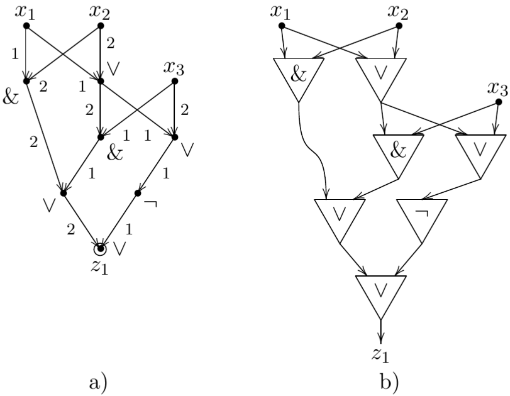


Рис. 4.2: СФЭ, полученная из квазидерева на рис. 2.2b

Схема Σ, которая получается из дерева $\mathcal{D}$, связанного с формулой $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из $\mathcal{Z}$, называется *квазидеревом, соответствующим формуле* $\mathcal{F}$. Заметим, что указанное квазидерево Σ однозначно определяет формулу $\mathcal{F}$ и является СФЭ над базисом Б. Из этого квазидерева путем «отождествления» (наложения) его изоморфных квазиподдеревьев можно получать и другие СФЭ, задающие формулу $\mathcal{F}$. На рис. 2.2b показано квазидерево над базисом Б_0 с входными БП x_1, x_2, x_3 и выходной БП z_1, которое получено из дерева, сопоставленного формуле (2.3) и изображенного на рис. 2.2a. На рис. 4.2a приведена СФЭ, полученная из данного квазидерева в результате отождествления двух его изоморфных квазиподдеревьев, а на рис. 4.2b дано более «наглядное» изображение этой СФЭ в виде системы соединенных соответствующим образом ФЭ.

Обозначим через $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$ множество всех СФЭ над базисом Б, и пусть $\mathcal{U}^{\mathrm{C}} = \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}_0}$. Заметим, что система квазидеревьев с общими входами, соответствующая системе формул над базисом Б, является СФЭ над Б, если выходам этих квазидеревьев приписаны различные выходные БП. В связи с этим формулы над Б и их системы будем считать частным случаем СФЭ над Б, полагая, что имеет место включение $\mathcal{U}^{\Phi}_{\mathrm{Б}} \subseteq \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$. Заметим также, что СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$, входит в $\mathcal{U}^{\Phi}_{\mathrm{Б}}$ тогда и только тогда, когда все стоки Σ, и только они, являются ее выходами, а из каждой вершины Σ, отличной от ее входов и выходов, исходит одна дуга.

Определим теперь функционирование СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ над базисом Б. Сначала индукцией по q, $q = 0, 1, \ldots$, определим для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней формулу $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v(x_1, \ldots, x_n)$ глубины q над базисом Б. Если $q = 0$, то есть v — вход Σ, положим $\mathcal{F}_v = x_j$, где x_j — входная БП, сопоставленная вершине v.

Пусть теперь v — вершина глубины q, $q \geqslant 1$, схемы Σ, которая имеет пометку φ_i и в которую входит k_i дуг, причем дуга с номером j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, исходит из вершины v_j глубины q_j, где уже реализована формула $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{v_j}$ глубины q_j, а для чисел $q, q_1, \ldots, q_{k_i}$ выполнено (2.2). Тогда в вершине v реализуется формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$ вида (2.1), которая имеет глубину q. При этом считается, что в вершине v СФЭ Σ *реализуется ФАЛ* $f(x_1, \ldots, x_n)$, если ФАЛ f реализуется формулой $\mathcal{F}_v$, и что СФЭ Σ *реализует систему ФАЛ* F, $F = (f_1, \ldots, f_m)$, или *реализует систему булевых уравнений* $z_1 = f_1, \ldots, z_m = f_m$, если f_j, $j = 1, \ldots, m$, — ФАЛ, реализованная в той выходной вершине СФЭ Σ, которой приписана БП z_j.

Заметим, что квазидерево, которое соответствует формуле $\mathcal{F}$, реализующей ФАЛ f, а также любая СФЭ, полученная из него отождествлением изоморфных квазиподдеревьев, реализует и формулу $\mathcal{F}$, и ФАЛ f. Так, СФЭ на рис. 4.2 реализует формулу (2.3) и ФАЛ $s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$, или уравнение $z_1 = s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$.

Две СФЭ считаются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ. Заметим, что СФЭ всегда эквивалентна системе формул, реализуемых ею на своих выходах. Заметим также, что изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v СФЭ Σ, которой сопоставлен ФЭ $\mathcal{E}_i$ с симметрической ФАЛ φ_i, не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v, а значит, не влияет на функционирование Σ. Схемы, получающиеся друг из друга в результате указанных преобразований, называются *квазиизоморфными*, а номера дуг, входящих в вершину v с симметрической ФАЛ, как правило, не указываются. Легко видеть, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных (квазиизоморфных) СФЭ реализуются одинаковые (соответственно подобные) формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные (квазиизоморфные) СФЭ эквивалентны, то есть для СФЭ справедливо неравенство (1.7).

Вершина СФЭ называется *висячей*, если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется *приведенной*, если в ней нет висячих вершин. Заметим, что система формул является приведенной СФЭ, и что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную СФЭ с помощью операции *удаления висячих вершин*. Заметим также, что приведенные СФЭ, и только они, получаются из систем квазидеревьев в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев, и что в приведенных СФЭ все вершины лежат на цепях, идущих от входов схемы к ее выходам.

Также как и для формул, для каждой СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, определим следующие параметры (функционалы сложности):
$L(\Sigma)$ — *сложность* Σ, то есть число всех ее ФЭ;
$D(\Sigma)$ — *глубина* Σ, то есть максимальная глубина ее вершин.
$R(\Sigma)$ — *ранг* Σ, то есть число дуг,исходящих из ее входов.

Лемма 2.1 обобщается для СФЭ следующим образом.

Лемма 4.1

Для приведенной СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathfrak{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leqslant L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leqslant L(\Sigma) + 1 \leqslant 2^{D(\Sigma)}, \tag{4.1}$$

где $L_{\&,\vee}$ — число ФЭ & и $\vee$ в Σ.

С содержательной точки зрения различные функционалы сложности отражают различные параметры моделируемых схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах. Ранг схемы отражает число обращений программы к памяти, в которой хранятся значения входных БП и т. п.

Обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}(L,n)$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}[D,n]$ множество формул $\mathcal{F}=\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$ над базисом Б, для которых $L(\mathcal{F})\leqslant L$ и $D(\mathcal{F})\leqslant D$, причем индекс Б_0 будем, как обычно, опускать. Заметим, что из неравенства (2.4) вытекает включение

$$\mathcal{U}^{\Phi}[D,n]\subseteq\mathcal{U}^{\Phi}\left(2^D-1,n\right). \qquad (4.2)$$

Для любого конечного множества схем $\mathcal{U}$ через $|\mathcal{U}|$ естественным образом будем обозначать число попарно неизоморфных схем в этом множестве, а через $\|\mathcal{U}\|$ — число попарно неэквивалентных схем в $\mathcal{U}$ (ясно, что $\|\mathcal{U}\|\leqslant|\mathcal{U}|$).

Лемма 4.2

Для любых натуральных n, L, D *выполняются неравенства*

$$\left|\mathfrak{U}^{\Phi}(L,n)\right| \leqslant (10n)^{L+1}, \tag{4.3}$$

$$\left\|\mathfrak{U}^{\Phi}(L,n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1}, \tag{4.4}$$

$$\left\|\mathfrak{U}^{\Phi}[D,n]\right\| \leqslant (8n)^{2^D}. \tag{4.5}$$

Доказательство

Оценим сверху число попарно не изоморфных (попарно не квазиизоморфных) формул во множестве $\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)$. Для того, чтобы задать с точностью до изоморфизма упорядоченное дерево $\mathcal{D}$, соответствующее формуле $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}(L,n)$, достаточно:

1) выбрать упорядоченное двоичное корневое дерево $\mathcal{D}'$ с q, $q \leqslant L$, нелистовыми вершинами, в котором вершины с полустепенью захода 2 помечены ФС &, $\vee$,

2) каждый исток $\mathcal{D}'$ пометить одной из БП $x_1, \ldots, x_n$, а вершины с полустепенью захода 1 — ФС $\neg$.

Продолжение доказательства

Пронумеруем множество нелистовых вершин дерева $\mathcal{D}'$ числами 1, $2, \ldots, q$ в порядке обхода в глубину и сопоставим каждой такой вершине v с полустепенью захода d, $d \in [1, 2]$ набор α, $\alpha \in B^d$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и $\alpha_j = 1$ тогда и только тогда, когда дуга с номером j, входящая в v, начинается с листа дерева $\mathcal{D}'$. Заметим, что набор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_L)$, где γ_i — набор, сопоставленный вершине с номером i, если $1 \leqslant i \leqslant q$, и произвольный набор из объединения $B^1 \cup B^2$ в случае $i > q$, а также набор ФС $\&$ и $\vee$, приписанных тем вершинам v_i, $1 \leqslant i \leqslant L$, для которых $\gamma_i \in B^2$, однозначно определяет дерево $\mathcal{D}'$ с точностью до изоморфизма.

Продолжение доказательства

Следовательно, число упорядоченных деревьев $\mathcal{D}'$ рассматриваемого вида не больше, чем 10^L, а число получаемых из него деревьев $\mathcal{D}$ не больше, чем n^{L+1}, так как в силу леммы 2.1

$$R(\mathcal{F}) \leqslant L + 1.$$

Перемножая указанные числа, получаем оценку (4.3).
Оценка (4.4) доказывается аналогично с учетом того, что при снятии нумерации с дуг дерева $\mathcal{D}'$, то есть при рассмотрении формул с точностью до квазиизоморфизма, двоичные наборы длины 2, сопоставленные его вершинам, можно выбирать из множества $\{(00), (01), (11)\}$ и поэтому число неупорядоченных деревьев $\mathcal{D}'$ рассматриваемого вида не больше, чем 8^L.
Неравенство (4.5) вытекает из (4.4) и (4.2).
Лемма доказана. $\square$

Замечание

Число попарно не квазиизоморфных формул в базисе $\{\&, \vee\}$ от БП $X(n)$ сложности не больше, чем L, не превосходит $(6n)^{L+1}$.

Лемма 4.3

Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\left\|\mathfrak{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8(L+n))^{L+1}. \tag{4.6}$$

Доказательство.

Заметим, что для того, чтобы задать СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)$, с точностью до квазиизоморфизма достаточно:
выбрать её остовное неупорядоченное наддерево $\mathcal{D}'$ с q, $q \leqslant L$, нелистовыми вершинами, которые помечены ФС базиса Б_0;
присоединить каждый лист $\mathcal{D}'$ либо к одному из n входов Σ, либо к одной из нелистовых вершин $\mathcal{D}'$, отличной от корня.
Оценка (4.6) получается из приведенной в лемме 4.2 оценки числа деревьев $\mathcal{D}'$ и оценки числа способов присоединения каждого листа $\mathcal{D}'$ путем их перемножения.
Лемма доказана. □

§5. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Распространим введенные в предыдущем параграфе понятия и обозначения на произвольный класс схем $\mathcal{U}$.
Эквивалентность схем Σ' и Σ'' из $\mathcal{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества

$$t: \ \Sigma' \sim \Sigma''.$$

Для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками*.

Тождество

$$\widehat{t}:\ \widehat{\Sigma}' \sim \widehat{\Sigma}'',$$

которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$, называется *подстановкой тождества* t. Схема Σ' называется *подсхемой схемы* Σ, если

$$V\left(\Sigma'\right) \subseteq V\left(\Sigma\right), \qquad E\left(\Sigma'\right) \subseteq E\left(\Sigma\right)$$

и любая вершина v, $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ, либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно выходом) Σ'.

Будем считать, что для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, имеет место принцип эквивалентной замены, то есть заменяя подсхему $\widehat{\Sigma}'$ схемы Σ эквивалентной ей схемой $\widehat{\Sigma}''$ мы получаем схему $\widetilde{\Sigma}$, которая эквивалентна схеме Σ. При этом все введенные для случая эквивалентных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, полнота системы тождеств и др.), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП схем из $\mathcal{U}$ без изменений. Заметим, что вопрос о существовании конечной полной системы тождеств (КПСТ) является одним из основных вопросов, связанных с изучением ЭП схем из заданного класса $\mathcal{U}$.

Рассмотрим эти вопросы на примере ЭП СФЭ. Мы будем использовать все введенные выше общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и снятием[1]) ее выходных БП.

[1] Под дублированием (снятием) выхода z_i СФЭ понимается нанесение на вершину с пометкой z_i еще одной выходной БП (соответственно удаление с неё пометки z_i)

Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ является формулой-словом (см. § 2), а соответствующую ей формулу-граф, т. е. квазидерево, будем обозначать через $\underline{\mathcal{F}}$. При этом тождеству $t: \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — формулы из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, будет соответствовать тождество $\underline{t} : \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$, где $\underline{\mathcal{F}}'$ и $\underline{\mathcal{F}}''$ — соответствующие $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ схемы из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, являющееся «схемным» аналогом тождества t.

Множество СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, будем обозначать через $\underline{\mathfrak{F}}$, а систему тождеств вида $\underline{t}$, где $t \in \tau$, а τ — система тождеств для $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, — через $\underline{\tau}$. Так, на рис. 5.1a и 5.1b приведены тождества $\underline{t^{\text{М}}_{\&}}$ и $\underline{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}$, являющиеся схемными аналогами введенных выше формульных тождеств $t^{\text{М}}_{\&}$ и $t^{\text{ПК}}_{1,\&}$.

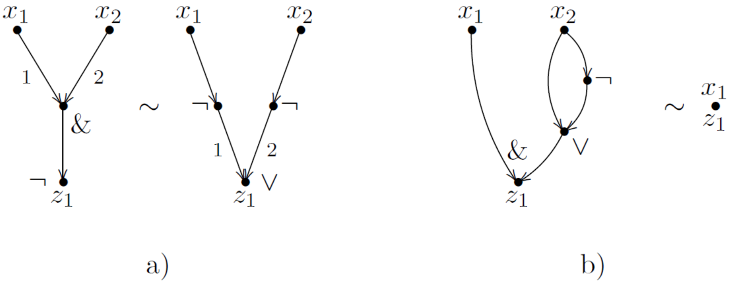


Рис. 5.1: тождества $\underline{t^{\mathrm{M}}_{\&}}$ и $\underline{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}$

На рис. 5.2a и 5.2b показаны тождество *ветвления* $t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}$ и тождество *снятия* $t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}$ *для функционального элемента* $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 5.2c — тождество *снятия входа* $t^{\mathrm{C}}_{\text{вх}}$.

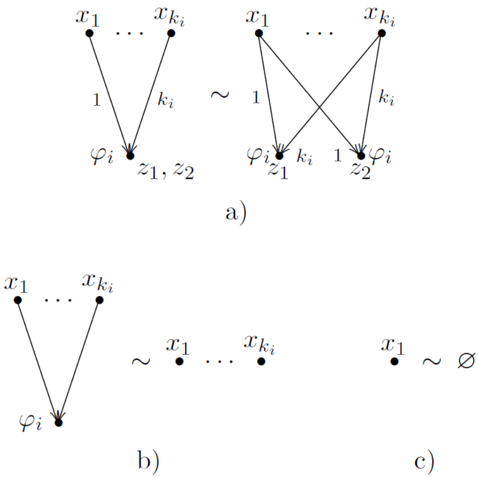


Рис. 5.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа. Заметим также, что тождества $t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}$, $t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}$, $t^{\mathrm{C}}_{\text{вх}}$ не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau^{\mathrm{B}}_{\text{Б}} = \left\{t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}\right\}_{i=1}^{b}, \qquad \tau^{\mathrm{C}}_{\text{Б}} = \left\{t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}\right\}_{i=1}^{b} \cup \left\{t^{\mathrm{C}}_{\text{вх}}\right\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющихся в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$, существует ЭП вида $\Sigma \underset{\{\tau^{\mathrm{C}}, \tau^{\mathrm{B}}\}}{\models\!\!\Rightarrow} \underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — формула (система формул) из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$.

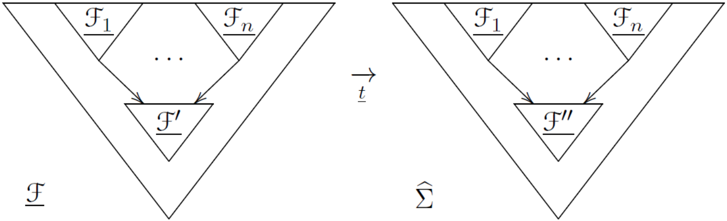


Рис. 5.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

Пусть, далее, $\mathcal{F} \underset{t}{\mapsto} \widehat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, где тождество t имеет вид

$$t: \; \mathcal{F}'(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \ldots, x_n),$$

а формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается из формулы $\mathcal{F}$ заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$. Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}} \underset{\underline{t}}{\mapsto} \widehat{\Sigma}$ (см. рис. 5.3). Заметим, что в том случае, когда формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ являются бесповторными формулами, а БП $x_1, \ldots, x_n$ — их существенными БП, СФЭ $\widehat{\Sigma}$ совпадает с СФЭ $\underline{\mathcal{F}''}$.

В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ формулы $\mathcal{F}$ необходимо с помощью тождеств $\tau_{\text{Б}}^{\text{В}}$ сформировать сначала подсхему $\underline{\mathcal{F}}'(\underline{\mathcal{F}}_1, \ldots, \underline{\mathcal{F}}_n)$, а затем применить тождество $\underline{t}$. При этом в СФЭ $\widehat{\Sigma}$ могут появиться висячие вершины или внутренние «ветвления», и тогда для перехода от $\widehat{\Sigma}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\widehat{\Sigma} \underset{\{\tau^{\text{С}}, \tau^{\text{В}}\}}{\models\!\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}}$. Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, существует моделирующее его ЭП вида

$$\underline{\mathcal{F}} \underset{\left\{\underline{\tau}, \tau_{\text{Б}}^{\text{В}}, \tau_{\text{Б}}^{\text{С}}\right\}}{\models\!\Rightarrow} \underline{\widehat{\mathcal{F}}}.$$

На рис. 5.4 показано ЭП СФЭ из $\mathfrak{U}^{\mathrm{C}}$, которое моделирует ЭП (3.1) для формул из $\mathfrak{U}^{\Phi}$:

$$x_1\left(x_2x_3 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right) \underset{t_{\&}^{\mathrm{M}}}{\mapsto} x_1\left(x_2x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}\right) \underset{t_{1,\&}^{\Pi\mathrm{K}}}{\mapsto} x_1.$$

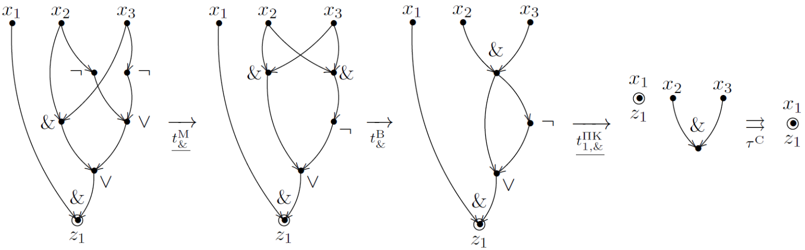


Рис. 5.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от формул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств $\tau_{\text{Б}}^{\text{В}}$, $\tau_{\text{Б}}^{\text{С}}$ вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.1

Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, то $\{\underline{\tau}, \tau^{\text{С}}, \tau^{\text{В}}\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$.

Следствие

Система тождеств $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^{\text{В}}, \tau^{\text{С}}\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{С}}$.

Рассмотрим далее вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса $\text{Б} = \{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ у нас имеется другой конечный полный базис $\text{Б}' = \{\varphi_i'\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi_i'\left(x_1, \ldots, x_{k_i'}\right)$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, где $k_i' \geqslant k_i$, реализует ФАЛ φ_i, $i = 1, \ldots, b$. Заметим, что в случае $k_i' > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_i'}$ являются фиктивными БП формулы Φ_i'. Положим

$$\Phi' = \left(\Phi_1', \ldots, \Phi_b'\right), \qquad \Pi' = \left(\Pi_1', \ldots, \Pi_b'\right),$$

где Π_i' — тождество вида $\varphi_i = \Phi_i'$, $i = 1, \ldots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса* Б *к базису* Б$'$.

Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом Б$'$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi_i'\left(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_i'}\right)$, то есть является результатом подстановки формулы $\mathcal{F}_j$ вместо БП x_j в формулу Φ_i' для всех j, $j = 1, \ldots, k_i$. Переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы* $\mathcal{F}$ *в базисе* Б$'$ *на основе формул перехода* Φ' или, иначе, *на основе тождеств перехода* Π'.

Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\Pi'}{\models\!\!\!\rightrightarrows} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом $\text{Б} \cup \text{Б}'$. Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества t, являющихся формулами из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, получается тождество t' для формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}'}^{\Phi}$, которое мы будем обозначать через $\Pi'(t)$. Множество формул вида $\Pi'(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, будем обозначать через $\Pi'(\mathfrak{F})$, а множество тождеств вида $\Pi'(t)$, где $t \in \tau$ — тождество над $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, — через $\Pi'(\tau)$.

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе Б с помощью ЭП формул базиса Б$'$. Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \ldots, \Phi'_b)$ — система формул перехода от базиса Б к базису Б$'$, а $\Pi' = (\Pi'_1, \ldots, \Pi'_b)$ — система тождеств перехода, связанная с Φ'. Заметим, что любое ЭП для формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, имеющее вид

$$\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}}, \tag{5.1}$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}'}^{\Phi}$ вида

$$\mathcal{F}' \underset{\tau'}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}}', \tag{5.2}$$

где $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$, $\widehat{\mathcal{F}}' = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$ и $\tau' = \Pi'(\tau)$.

Действительно, пусть ЭП (5.1) является однократным ЭП на основе тождества t, $t \in \tau$, которое имеет вид

$$t: \ \mathfrak{A}\left(x_1, \ldots, x_q\right) = \mathfrak{B}\left(x_1, \ldots, x_q\right),$$

и пусть формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается в результате замены подформулы $\mathfrak{A}\left(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_q\right)$ формулы $\mathcal{F}$ формулой $\mathfrak{B}\left(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_q\right)$. Тогда тождество $t' = \Pi'(t)$ имеет вид

$$t': \ \mathfrak{A}'\left(x_1, \ldots, x_1\right) = \mathfrak{B}\left(x_1, \ldots, x_q\right),$$

где $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$, а формула $\widehat{\mathcal{F}}'$ может быть получена из формулы $\mathcal{F}'$ в результате замены ее подформулы $\mathfrak{A}'\left(\mathcal{F}_1', \ldots, \mathcal{F}_q'\right)$, где $\mathcal{F}_j' = \Pi'\left(\mathcal{F}_j\right)$ для всех j, $j \in [1, q]$, формулой $\mathfrak{B}'\left(\mathcal{F}_1', \ldots, \mathcal{F}_q'\right)$.

Моделирование кратного ЭП вида (5.1) с помощью кратного ЭП вида (5.2) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (5.1). Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, которые принадлежат множеству $\Pi'\left(\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}\right)$, то есть являются «моделями» формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, на основе системы тождеств $\Pi'(\tau)$, являющихся «моделями» тождеств из τ. Для того чтобы проводить ЭП для произвольных формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$ с использованием системы тождеств $\Pi'(\tau)$, выберем какую-либо систему формул перехода $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{b'})$ от базиса Б$'$ к базису Б и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода $\Pi = (\Pi_1, \ldots, \Pi_{b'})$.

Пусть $\check{\Pi}$ — система тождеств вида $\check{\Pi} = \Pi'(\Pi)$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из Π на основе системы тождеств Π'. Для произвольной формулы $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, положим

$$\check{\Pi}\left(\mathcal{F}'\right) = \Pi'\left(\Pi\left(\mathcal{F}\right)\right)$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \underset{\check{\Pi}}{\models\!\!\Rightarrow} \check{\mathcal{F}}' = \check{\Pi}\left(\mathcal{F}'\right), \quad \check{\mathcal{F}}' \in \Pi'\left(\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}\right).$$

В силу сказанного выше, отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.2 (теорема перехода)

Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathfrak{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса Б к базису Б$'$ и от базиса Б$'$ к базису Б соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathfrak{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$.

Следствие

Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathfrak{U}^{\Phi}$ (см. § 3) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе Б.

Аналогичным образом на основе теоремы 5.1 решаются вопросы построения КПСТ для ЭП СФЭ в произвольном базисе.

§6. Контактные схемы и π-схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных схем

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов, а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i ($\overline{x}_i$) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП x_i.

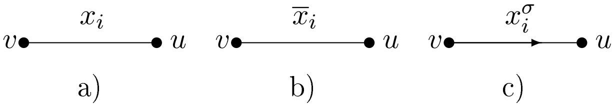


Рис. 6.1: типы контактов

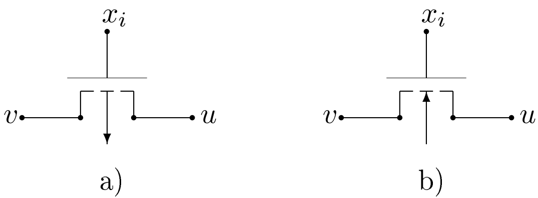


Рис. 6.2: физическая интерпретация контактов

Считается, что контакт вида x_i^σ, $\sigma \in \{0,1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.
С точки зрения управления проводимостью неориентированный размыкающий (замыкающий) контакт БП x_i функционирует как p-МОП (соответственно n-МОП) транзистор, на затвор которого поступает БП x_i (см. рис. 6.2a и 6.2b), а аналогичный ориентированный контакт — как МОП-транзистор соответствующего типа с диодом Шоттки.
Кроме того, ориентированный контакт вида x_i^σ, идущий из вершины v в вершину u (см. рис. 6.1c), часто рассматривают как команду условного перехода из v в u, который выполняется, если $x_i = \sigma$.

Сеть Σ с входами $a'_1, \ldots, a'_p$ и выходами $a''_1, \ldots, a''_q$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаниями $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, называется (p, q)*-контактной схемой* (КС) *от БП* $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma\left(x_1, \ldots, x_n; a'_1, \ldots, a'_p; a''_1, \ldots, a''_q\right)$. При этом число контактов называется *сложностью* КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$. На рис. 6.3a–c показаны некоторые конкретные КС от БП x_1, x_2, x_3 с входом a_1 и выходами a_2, a_3.

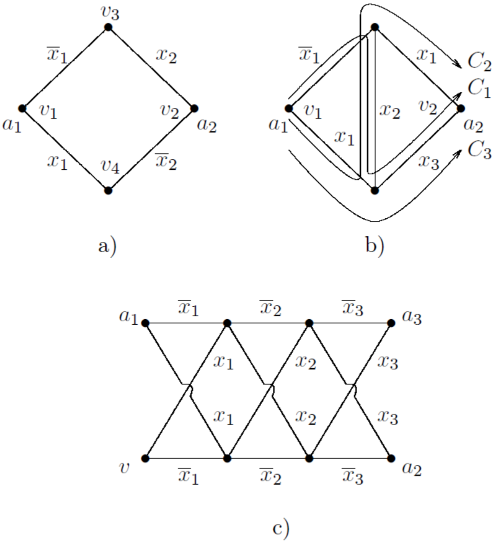


Рис. 6.3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Пусть Σ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор из B^n. Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\overline{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α, и снятия пометок с остальных ребер Σ. Для вершин v и u КС Σ введем *функцию проводимости от вершины v к вершине u* как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \ldots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v-u)$-цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u. Будем говорить также, что ФАЛ $g_{v,u}$ является *функцией достижимости вершины u из вершины v*, или, иначе, *реализуется между вершинами v и u*.

Из определения следует, что для нахождения ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно просмотреть все наборы α, $\alpha \in B^n$, и для каждого из них выяснить наличие или отсутствие в Σ цепи, состоящей из проводящих на наборе α контактов, которая идет из v в u. Так, просматривая все наборы значений БП x_1, x_2, можно убедиться в том, что ФАЛ проводимости $g_{v_1,v_2}(x_1, x_2)$ в КС Σ, показанной на рис. 6.3a, равна $x_1 \oplus x_2$, а ФАЛ проводимости g_{v_3,v_4} равна 0. Будем считать, что в каждой вершине $(1, m)$-КС $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1; a_2, \ldots, a_{m+1})$ реализуется ФАЛ проводимости от входа a_1 к этой вершине и что Σ реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ проводимости от a_1 к выходу с пометкой a_{j+1}, $j \in [1, m]$. При этом, очевидно, в вершине a_1 реализуется ФАЛ 1, которую в дальнейшем по умолчанию будем использовать в качестве пометки единственного входа $(1, m)$-КС.

Так, КС, изображенные на рис. 6.3a, 6.3b и 6.3c, реализуют ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, $H(x_1, x_2, x_3)$ и набор ФАЛ $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\ x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$ соответственно. На рис. 6.4a показана $(1, 2^n)$-КС $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n; 1; a_0, \ldots, a_{2^n-1})$, которая называется $(1,\, 2^n)$-*контактным деревом порядка* n от БП $X(n)$. Легко видеть, что в выходной вершине a_i, $i = 0, \ldots 2^n - 1$, этого контактного дерева (КД) реализуется ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (i-1)$, и что ФАЛ проводимости между любыми его выходами равна 0. Таким образом, $(1, 2^n)$-КД порядка n является дешифратором порядка n, то есть схемой, реализующей систему Q_n из всех ЭК ранга n от БП $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные системы ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

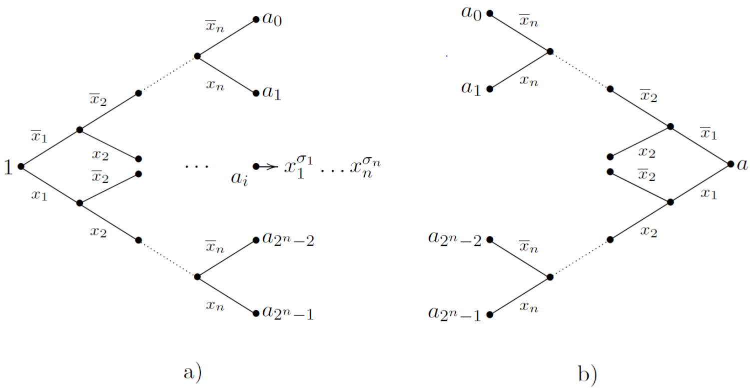


Рис. 6.4: $(1, 2^n)$- и $(2^n, 1)$-контактные деревья порядка n

Для множества C, состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ, определим его *функцию проводимости* $K(C)$ и *функцию отделимости* $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\sigma}_r}$ соответственно. При этом множество C называется *проводящим* (*отделимым*), если $K(C) \neq 0$ $(J(C) \neq 1)$, и *нулевым* (соответственно *единичным*) в противном случае. Заметим, что в результате приведения подобных отличная от 0 ФАЛ $K(C)$ и отличная от 1 ФАЛ $J(C)$ могут быть преобразованы в ЭК и ЭД соответственно. Очевидно, также, что

$$K\left(C'\right) \geqslant K(C) \quad \text{и} \quad J\left(C'\right) \leqslant J(C),$$

если $C' \subseteq C$.

Из введенных определений следует, что ФАЛ g, реализуемая КС $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1; a_2)$, обращается в 1 (обращается в 0) на наборе α, $\alpha \in B^n$, тогда и только тогда, когда в Σ существует множество контактов C, образующее простую проводящую $(a_1 - a_2)$-цепь (соответственно тупиковое отделимое $(a_1|a_2)$)-сечение), для которого $K(C) = 1$ (соответственно $J(C) = 0$) на наборе α. Таким образом,

$$g(x_1, \ldots, x_n) = K(C_1) \vee \ldots \vee K(C_t) = \\ = J(S_1) \,\&\ldots\& J(S_r), \quad (6.1)$$

где $C_1, \ldots, C_t$ и $S_1, \ldots, S_r$ — все простые проводящие $(a_1 - a_2)$-цепи и все тупиковые отделимые $(a_1|a_2)$-сечения КС Σ.

Заметим, что первая из формул (6.1) может быть преобразована в ДНФ, а вторая — в КНФ, в результате приведения подобных (см. §3), если $g \not\equiv 0$ и $g \not\equiv 1$ соответственно. Так, в КС, показанной на рис. 6.3b, имеются три простые проводящие цепи C_1, C_2 и C_3, которые идут из a_1 в a_2. При этом

$$K(C_1) = \overline{x}_1 x_2 x_3, \quad K(C_2) = x_1 x_2 x_1 = x_1 x_2, \quad K(C_3) = x_1 x_3$$

и, следовательно,

$$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 =$$
$$= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1 = H(x_1, x_2, x_3).$$

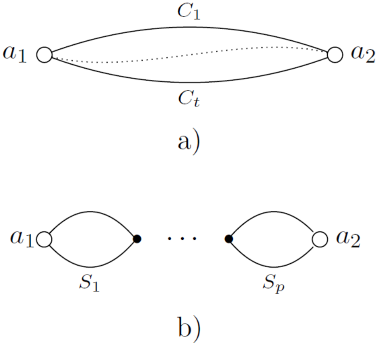


Рис. 6.5: КС, моделирующие ДНФ и КНФ

Простейшей π-схемой считается любая $(1,1)$-КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 6.6a). Если π-схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то $(1,1)$-КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 6.6b и 6.6c) тоже является π-схемой. Заметим, что при этом вход (выход) Σ' является результатом отождествления входов (соответственно выходов) Σ_1 и Σ_2, тогда как входом Σ'' является вход Σ_1, выходом Σ'' — выход Σ_2, а выход Σ_1 отождествляется с входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ''. Легко видеть, что π-схема, показанная на рис. 6.6a, реализует ФАЛ x_i^{σ}, а π-схемы Σ' и Σ'' (см. рис. 6.6b и 6.6c) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где f_1 и f_2 — ФАЛ, реализуемые π-схемами Σ_1 и Σ_2 соответственно.

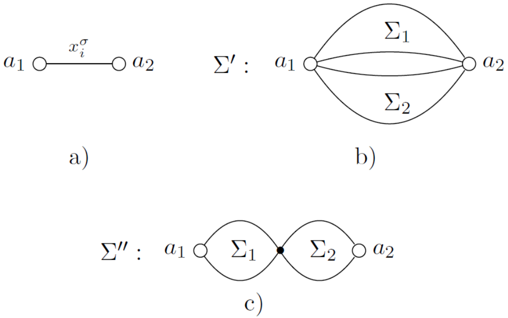


Рис. 6.6: к определению π-схемы

Лемма 6.1

Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Доказательство.

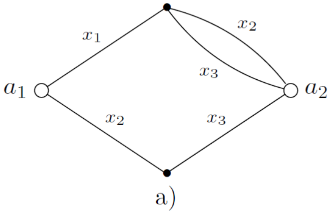
Построим формулу $\mathcal{F}$ индукцией по строению π-схемы Σ. Если Σ — простейшая π-схема вида x_i^{σ}, то положим $\mathcal{F} = x_i^{\sigma}$. Если π-схемам Σ_1 и Σ_2 уже сопоставлены формулы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с поднятыми отрицаниями, то π-схеме Σ' (Σ''), получающейся в результате параллельного (соответственно последовательного) соединения Σ_1 и Σ_2, сопоставим формулу $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ (соответственно $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}_1 \& \mathcal{F}_2$). При этом

$$R\left(\mathcal{F}'\right) = R\left(\mathcal{F}''\right) = R\left(\mathcal{F}_1\right) + R\left(\mathcal{F}_2\right)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению,

$$R\left(\mathcal{F}'\right) = R\left(\mathcal{F}''\right) = L\left(\Sigma_1\right) + L\left(\Sigma_2\right) = L\left(\Sigma\right).$$

Аналогичным образом, индукцией по строению формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями можно найти эквивалентную ей π-схему Σ такую, что $L\left(\Sigma\right) = R\left(\mathcal{F}\right)$.
Лемма доказана. $\square$



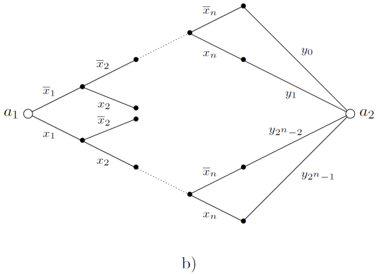


Рис. 6.7: примеры π-схем

На рис 6.7a показана π-схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1 (x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3,$$

а на рис. 6.7b — π-схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n, — в соответствии с формулой

$$\mu_n(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\cdots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} \right) \cdots \right) \right).$$

Схема, моделируюшая совершенную ДНФ ФАЛ f, называется *канонической* КС для этой ФАЛ.
Будем называть $(1, m)$-КС *приведенной*, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС $\widehat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполюсных вершин и контактов, является эквивалентной Σ приведенной КС такой, что $L(\widehat{\Sigma}) \leqslant L(\Sigma)$.
Заметим, что приведенная КС не содержит петель, а приведенная КС, не реализующая нулевых ФАЛ, является связным графом. Так, КС, показанная на рис. 6.3c, не является приведенной, а соответствующая ей приведенная КС получается из нее удалением вершины v.

Рассмотрим теперь некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть $\mathcal{U}^{\text{К}}$ и $\mathcal{U}^{\pi}$ — множество всех КС из неориентированных контактов и множество всех π-схем соответственно. Если $\mathcal{U}^{\text{А}}$ — один из указанных классов схем, то через $\mathcal{U}^{\text{А}}(L, n)$ будем обозначать множество приведенных $(1, 1)$-схем Σ из $\mathcal{U}^{\text{А}}$ от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leqslant L$. Для любого множества схем $\mathcal{U}$ через $|\mathcal{U}|$ и $\|\mathcal{U}\|$ будем по-прежнему обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{U}$ соответственно. При этом для любого из введенных выше множеств схем неравенство (1.7) будет выполняться.

Лемма 6.2

При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathfrak{U}^{\pi}(L,n)\| \leqslant (12n)^{L}. \tag{6.2}$$

Доказательство.

В силу леммы 6.1, достаточно доказать, что число попарно не эквивалентных формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ с поднятыми отрицаниями над базисом Б$_0$, для которых $R(\mathcal{F}) \leqslant L$, не превосходит $(12n)^L$. Для этого сопоставим формуле $\mathcal{F}$ указанного вида формулу $\mathcal{F}'$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\{\&,\vee\}}$ от БП $x_1, \ldots, x_{2n}$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы $\overline{x}_i$, $i \in [1, n]$, формулой x_{i+n} и для которой, в силу замечания к лемме 2.1,

$$L(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}) - 1 \leqslant L - 1.$$

При таком сопоставлении неэквивалентные формулы переходят в неэквивалентные, и поэтому число попарно не эквивалентных формул рассматриваемого вида не больше, чем $\left\|\mathcal{U}^{\Phi}_{\{\&,\vee\}}(L-1, 2n)\right\|$, откуда, в силу замечания к лемме 4.2, следует (6.2).
Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.3

При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\left\|\mathfrak{U}^{\mathrm{K}}(L,n)\right\| \leqslant (8nL)^{L}.$$

Доказательство

Возьмем произвольную КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1; a_2)$, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L, n)$, и выделим в ней остовное дерево $\mathcal{D}$ с корнем a_2 так, вершина a_1 была листом $\mathcal{D}$. Пусть, далее, $\mathcal{D}'$ — связанное с $\mathcal{D}$ остовное наддерево КС Σ, которое получается путем присоединения каждого из не вошедших в $\mathcal{D}$ ребер Σ к одной из своих концевых вершин, отличной от a_1, так, чтобы все ребра, инцидентные a_2 в Σ, были бы инцидентны a_2 в $\mathcal{D}'$. Рассмотрим ориентированное упорядоченное дерево $\mathcal{D}''$, получающееся из $\mathcal{D}'$ введением (условной) ориентации всех его ребер по направлению к корню и таким их упорядочением, при котором вершина a_1 становится первым листом $\mathcal{D}''$.

Продолжение доказательства

Заметим, что число ребер (вершин, листьев) дерева $\mathcal{D}''$ не больше, чем L (соответственно $L+1$, L), и поэтому, в силу (1.4), число таких деревьев с учетом пометок их ребер символами $x_1, \ldots, x_n$, $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ не больше, чем $(8n)^L$. Заметим также, что КС Σ может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева $\mathcal{D}''$ к одной из его вершин, отличной от a_2. Следовательно, $\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L,n)\right\| \leqslant \left|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L,n)\right| \leqslant (8nL)^L$. Лемма доказана. □

Рассмотрим, в заключение, особенности функционирования КС с несколькими входами. Будем считать, что в каждой вершине (p, q)-КС Σ реализуется столбец, составленный из p ФАЛ проводимости от входов Σ к этой вершине, а сама КС Σ реализует матрицу, которая состоит из q столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС $\Sigma =$
$= \Sigma\left(x_1, \ldots, x_n; a'_1, \ldots, a'_p; a''_1, \ldots, a''_q\right)$ представляет собой матрицу $F = F\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ с p строками, q столбцами и элементами из $P_2(n)$, для которой $F\left\langle i, j\right\rangle$ — ФАЛ, реализуемая между a'_i и a''_j, где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, q]$, то есть при любом α, $\alpha \in B^n$, матрица $F\left(\alpha\right)$ является матрицей достижимости сети $\Sigma|_{\alpha}$. В частности, функционирование $(1, q)$-КС представляет собой набор (строку) из q ФАЛ проводимости от ее входа к выходам, а функционирование $(p, 1)$-КС — столбец из p ФАЛ проводимости от ее входов к выходу.

Так, КС $\Sigma\left(x_1, x_2, x_3; a_1, v; a_2, a_3\right)$, показанная на рисунке 6.3c реализует матрицу $\begin{bmatrix} l_3 & \bar{l}_3 \\ \bar{l}_3 & l_3 \end{bmatrix}$ от БП $X(3)$, а на рис. 6.4b приведено $(2^n, 1)$-КД порядка n от БП $X\left(n\right)$, которое имеет вид $\mathcal{D}\left(x_1, \ldots, x_n; a_0, \ldots, a_{2^n-1}; a\right)$ и реализует столбец из всех ЭК множества Q_n, упорядоченных сверху вниз по возрастанию их номеров.

В соответствии с общими правилами функционирование КС $\Sigma = \Sigma\left(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_m\right)$ с неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида $\Sigma\left(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_m;\ a_1, \ldots, a_m\right)$.

В этом случае матрица F является рефлексивной и транзитивной матрицей, а если, кроме того, Σ — неориентированная сеть, то и — симметричной матрицей.
Заметим также, что функционирование $(1,1)$-КС из неориентированных контактов по существу не отличается от функционирования соответствующей двухполюсной КС с неразделенными полюсами.
В частности, показанная на рис. $6.3c$ КС с неразделенными полюсами a_1, a_2, a_3 реализует матрицу $\begin{bmatrix} 1 & l_3 & \bar{l}_3 \\ l_3 & 1 & 0 \\ \bar{l}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, КС из тождественных вершин реализует единичную матрицу, если каждая ее вершина является входом и выходом с одним и тем же номером и т. д.

С другой стороны, любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица F, $F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, где $1 \leqslant i < j \leqslant m$, а КС Σ_{ij} является π-схемой и построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F\langle i, j\rangle$ и считается *канонической КС матрицы* F.

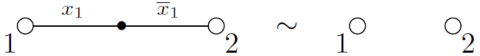
§7. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

Рассмотрим вопросы ЭП для КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ с неразделенными (бесповторными) полюсами. Напомним, что эквивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, то есть справедливость тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ''. На рис. 7.1a–7.1e и 7.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества t_1–t_5 и $t_6^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

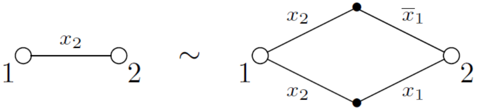
a) t_1 : $\bullet \sim \varnothing$

b) t_2 :

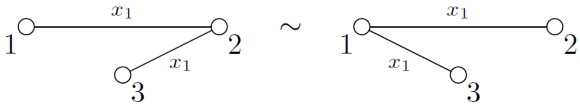
c) t_3 :



d) t_4 :



e) t_5 :



f) $t_6^{(m)}$:

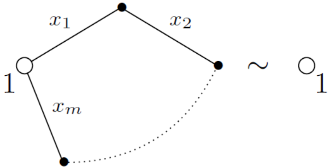


Рис. 7.1: основные тождества для КС

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС, мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из того, что матрица достижимости КС, являющейся результатом отждествления, однозначно определяется матрицей достижимости исходной КС. На рис. 7.2a (7.2b) показана подстановка $\widehat{t_4}$ тождества t_4 (соответственно $\widehat{t_5}$ тождества t_5), связанная с переименованием БП x_2 в x_1 (соответственно полюсов $1 = 3$ в 1).

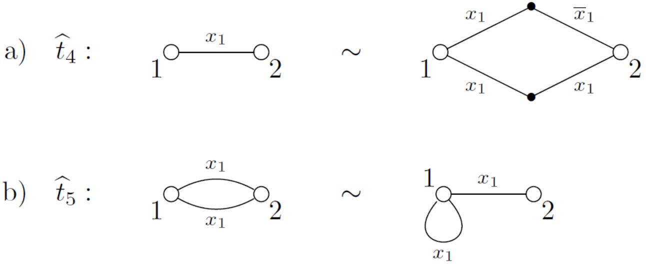


Рис. 7.2: подстановки для основных тождеств

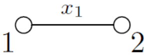
Понятие подсхемы для КС из рассматриваемого класса определяется так. Для подсхемы Σ' КС Σ имеет место включение $V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma)$ и $E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$, а полюсами Σ' являются все принадлежащие ей полюса КС Σ и все те ее вершины, которые инцидентны в Σ ребрам из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, и, возможно, некоторые другие вершины. При таком определении подсхемы для рассматриваемого класса КС будет выполняться принцип эквивалентной замены.

Рассмотрим примеры ЭП контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 7.3a–7.3e приведены тождества t_7–t_{11}, которые мы будем называть *вспомогательными*. Тождество t_{10} называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество t_{11} — «леммой» о звезде.

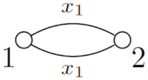
Лемма 7.1

Имеет место выводимость $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models \{t_7 - t_{11}\}$.

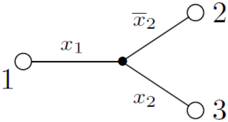
a) t_7 :



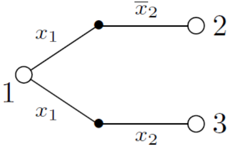
$\sim$



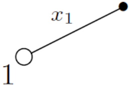
b) t_8 :



$\sim$



c) t_9 :



$\sim$

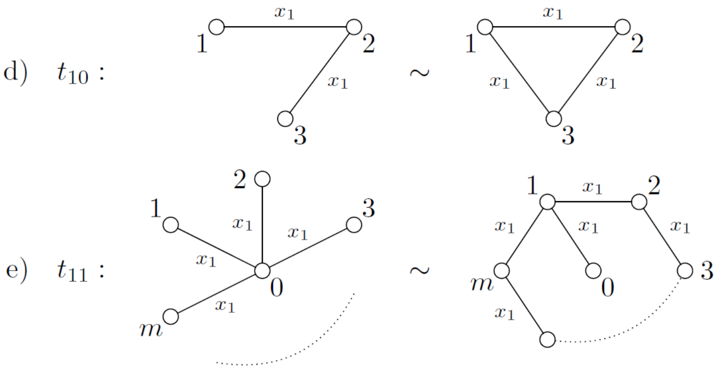


Рис. 7.3: вспомогательные тождества для КС

Доказательство.

Заметим, что выводимость $\{t_5, t_6^{(1)}\} \Rrightarrow t_7$ доказывается применением тождества $t_6^{(1)}$ к правой части тождества $\widehat{t_5}$ (см. рис. 7.2а) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств t_8–t_{11} из основных тождеств $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$ показана на рис. 7.4–7.7 соответственно, где Σ_i и $\check{\Sigma}_i$ — левая и правая части тождества t_i, $i \in [8, 11]$. □

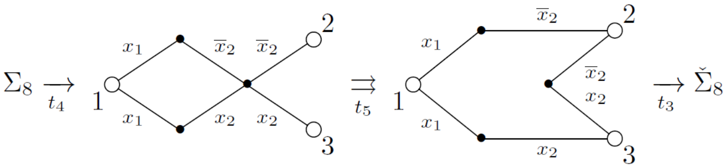


Рис. 7.4: вывод t_8

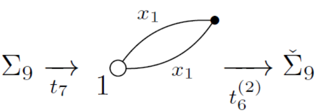
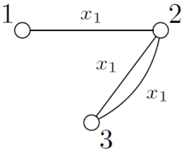


Рис. 7.5: вывод t_9

$\Sigma_{10} \xrightarrow[t_7]{}$



$\xrightarrow[t_5]{} \check{\Sigma}_{10}$

Рис. 7.6: вывод t_{10}

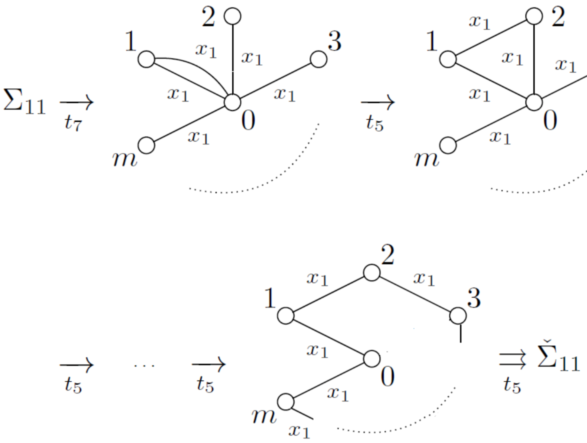


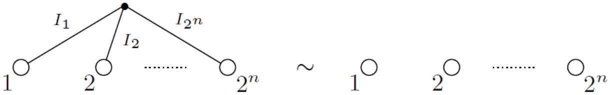
Рис. 7.7: вывод t_{11}

Обобщим тождества t_1–t_{11} на случай КС от БП $X(n)$, где $n \geqslant 2$. Для каждого i, $i \in [1, 2^n]$, сопоставим ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = i - 1$, моделирующую ее цепочку $I_i^{(n)}$, и пусть

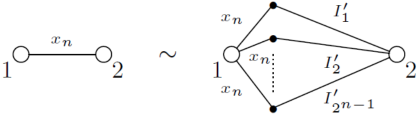
$$\begin{aligned}
I_i^{(n)} &= I_i, \quad i \in [1, 2^n], & I &= I_{2^n};\\
I_i^{(n-1)} &= I_i', \quad i \in \left[1, 2^{n-1}\right], & I' &= I_{2^{n-1}}';\\
I_i^{(n-2)} &= I_i'', \quad i \in \left[1, 2^{n-2}\right], & I'' &= I_{2^{n-2}}''.
\end{aligned}$$

a) $t_2^{(n)}$:

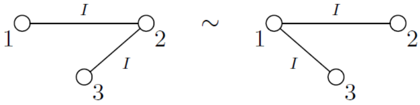
b) $t_3^{(n)}$:



c) $t_4^{(n)}$:

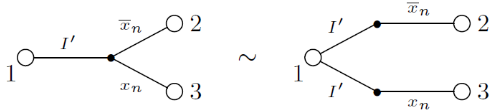


d) $t_5^{(n)}$:

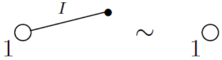


e) $t_7^{(n)}$:

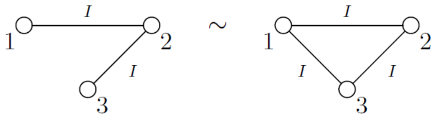
f) $t_8^{(n)}$:



g) $t_9^{(n)}$:



h) $t_{10}^{(n)}$:



i) $t_{11}^{(n)}$:

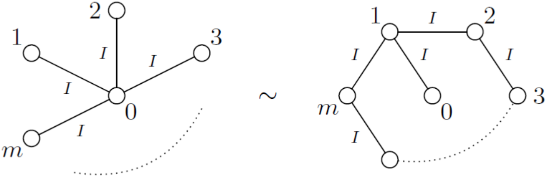


Рис. 7.8: обобщенные тождества порядка n для КС

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \left\{t_1^{(n)}, \ldots, t_{11}^{(n)}\right\}$, где $t_1^{(n)} = t_1$, $t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 7.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 7.8a, где $\widetilde{I}$ — произвольная перестановка цепочки I, а остальные тождества приведены на рис. 7.8b—7.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка* n. При этом система $\tau_n = \left\{t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(n)}\right\}$ считается системой основных тождеств порядка n, а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞.

Лемма 7.2

При $n \geqslant 2$ *имеет место выводимость* $\tau_n \rightrightarrows \tau^{(n)}$.

Доказательство.

Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \rightrightarrows t_2^{(n)}, \qquad \{t_9\} \rightrightarrows t_9^{(n)}.$$

Выводимость $\tau_n \rightrightarrows t_i^{(n)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, докажем индукцией по n, $n \geqslant n_i$, где $n_3 = n_5 = 1$ и $n_8 = n_4 = 2$. Базис этой индукции составляет тождество $t_i = t_i^{(n_i)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части $\check{\Sigma}_i^{(n)}$ тождества $t_i^{(n)}$, $n > n_i$, из его левой части $\Sigma_i^{(n)}$, показанная на рис. 7.9–7.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\left\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\right\} \rightrightarrows t_7^{(n)}, \qquad \left\{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\right\} \rightrightarrows \left\{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\right\}$$

при $n \geqslant 2$ доказываются аналогично тому, как это делалось для случая $n = 1$ (см. рис. 7.6, 7.7). Лемма доказана. □

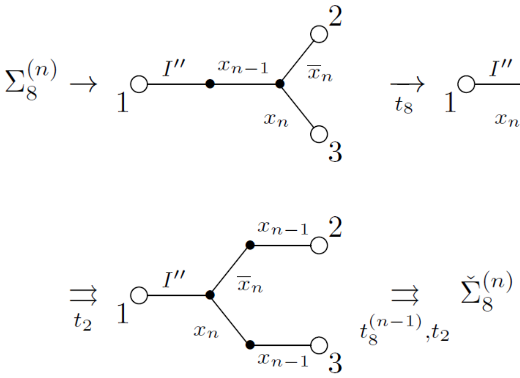


Рис. 7.9: вывод $t_8^{(n)}$

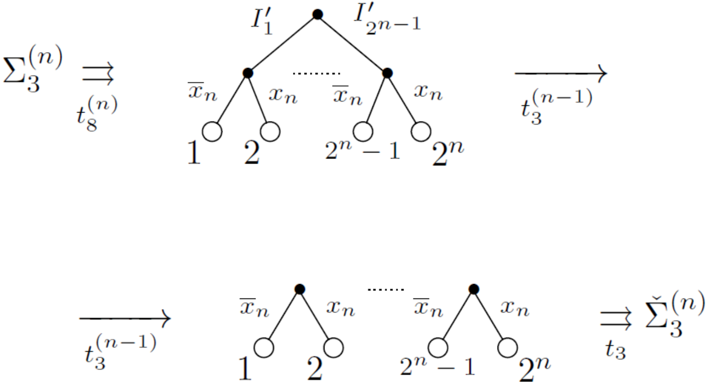


Рис. 7.10: вывод $t_3^{(n)}$

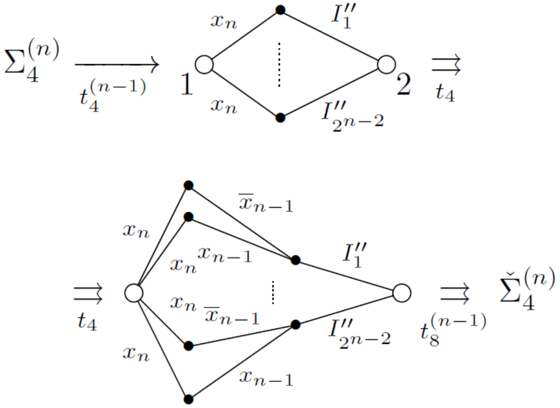


Рис. 7.11: вывод $t_4^{(n)}$

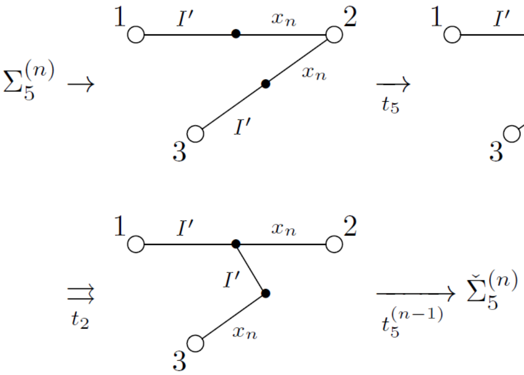


Рис. 7.12: вывод $t_5^{(n)}$

§8. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств τ_∞ для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы τ_∞ произвольную КС из $\mathcal{U}^{\text{К}}$ можно привести к каноническому виду. Напомним, что каноническая КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, или, иначе, *каноническая КС порядка* n, представляет собой объединение канонических $(1,1)$-КС вида $\widehat{\Sigma}_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Любую цепь $I_i^{(n)}$, где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка* n.

Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

(1) любой контакт $\widehat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n, являющейся подсхемой схемы $\widehat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;

(2) любая внутренняя вершина $\widehat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта (1);

(3) в КС $\widehat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта (1), которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;

(4) в КС $\widehat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 8.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 8.1b).

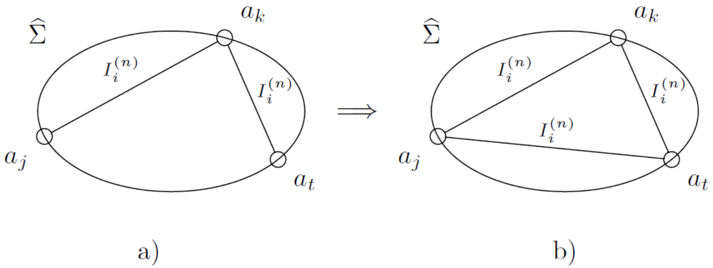


Рис. 8.1: к свойству (4) КС канонического вида

Лемма 8.1

Для любой КС Σ, *где* $\Sigma \in \mathfrak{U}^{\text{К}}$ *и* $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, *и любой эквивалентной* Σ *КС* $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ *канонического вида существует ЭП* $\Sigma \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \widehat{\Sigma}$.

Доказательство

Построим ЭП вида

$$\Sigma \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma_1 \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma_2 \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma_3 \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$

где КС Σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами $(1), \ldots, (i)$, отличающими канонические КС.

Продолжение доказательства

Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \underset{t_4^{(n)}}{\rightrightarrows} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$.
Существование ЭП

$$\Sigma_1 \underset{\left\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\right\}}{\rightrightarrows} \Sigma_2 \tag{8.1}$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС Σ_1, которые не являются внутренними вершинами ее канонических цепей. Базис индукции составляют схемы Σ_1, которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$.

Продолжение доказательства

Пусть теперь КС Σ_1 имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть v — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества $t_6^{(n)}$ все присоединенные к v «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи $C_1, \ldots, C_q$, концевой вершиной которых она является (см. рис. 8.2a). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \cdots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого j, $j \in [1, p]$, цепи $C_{a_j}, \ldots, C_{a_{j+1}-1}$ являются цепями типа $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$, где $i_1, \ldots, i_p$ — различные числа отрезка $[1, 2^n]$. Применяя к каждой из этих p групп цепей одного типа тождество $t_{11}^{(n)}$, получим КС Σ_1', в которой из вершины v выходит по одной цепи каждого типа I_{i_j}, $j \in [1, p]$ (см. рис. 8.2b).

Продолжение доказательства

Пусть, далее, КС Σ_1'' получается из КС Σ_1' присоединением к вершине v с помощью тождества $t_9^{(n)}$ «висячих» цепей $C_{p+1}, \ldots, C_{2^n}$ всех отсутствующих среди $I_{i_1}, \ldots, I_{i_p}$ типов (см. рис. 8.2c), а КС Σ_1''' получается из КС Σ_1'' в результате удаления с помощью тождества $t_3^{(n)}$ вершины v вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества t_1 образовавшихся при этом изолированных вершин — концевых вершин цепей $C_{p+1}, \ldots, C_{2^n}$ (см. рис. 8.2d). По индуктивному предположению для КС Σ''' существует ЭП вида

$$\Sigma''' \underset{\left\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\right\}}{\Rightarrow} \Sigma_2$$

и, следовательно, для КС Σ_1 существует ЭП (8.1).

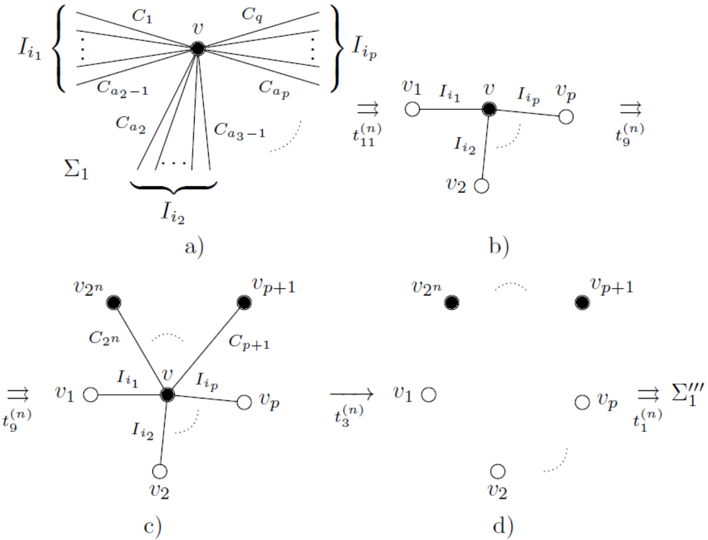


Рис. 8.2: к доказательству леммы 8.1

Продолжение доказательства

Переход от КС Σ_2 к КС Σ_3 осуществляется с помощью тождеств $t_6^{(n)}$ и $t_7^{(n)}$, а от КС Σ_2 к КС Σ_3 — с помощью тождеств $t_{10}^{(n)}$.

Лемма доказана. $\square$

Теорема 8.1

Для любых двух эквивалентных КС Σ' *и* Σ'' *от БП* $x_1, \ldots, x_n$ *существует ЭП вида* $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$.

Доказательство.

Пусть $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ — канонические КС от БП $x_1, \ldots, x_n$, эквивалентные КС Σ' и Σ'' соответственно. Из определений следует, что $\widehat{\Sigma}' \underset{t_2^{(n)}}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}''$, и поэтому, в силу леммы 8.1, существует ЭП вида

$$\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}' \underset{t_2^{(n)}}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}'' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1

Система τ_n *является КПСТ для ЭП КС из* $\mathfrak{U}^{\mathrm{K}}$ *от БП* $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие 2

Система τ_∞ *является ПСТ для ЭП КС из* $\mathfrak{U}^{\mathrm{K}}$.

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$. Для КС Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$ и набора α, $\alpha \in B^n$, определим величину

$$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|,$$

которая задает цикломатическое число графа $\Sigma|_\alpha$.
Положим, далее,

$$\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha).$$

Лемма 8.2

Если $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\Rightarrow} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, *то* $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, *а если* $\Sigma' \underset{\tau_k}{\Rightarrow} \Sigma''$, *где* $k < n$, *то* $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ *делится на* 2^{n-k}.

Доказательство

Докажем, что $\Theta(\Sigma')=\Theta(\Sigma'')$, если $\Sigma' \underset{t_i}{\longrightarrow} \Sigma''$ для любого i из отрезка $[1,5]$. Действительно, пусть КС Σ'' получается из КС Σ' заменой ее подсхемы $\widehat{\Sigma}'_i$, которая имеет вид левой части тождества t_i, на соответствующую ей правую часть $\widehat{\Sigma}''_i$ этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого i, $i \in [1,5]$, число линейно независимых циклов графов $\Sigma|_{\alpha'}$ и $\Sigma|_{\alpha''}$ одинаково при всех α, $\alpha \in B^n$, и, следовательно, $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$.

Пусть теперь $\Sigma' \underset{\tau_k}{\Rightarrow} \Sigma''$, причем $k < n$. Если КС Σ' содержит в качестве подсхемы цикл из k контактов с одним полюсом, то КС Σ'' содержит вместо него один лишь полюс.

Рассмотрим цикломатическое число сети $\Sigma'|_\alpha$ для различных $\alpha, \alpha \in B^n$.

Продолжение доказательства

Если цикл указанного вида в КС Σ' содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого α, $\alpha \in B^n$, $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 0$. В противном случае, пусть $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем $m \leqslant k$. Заметим, что если цикл проводит на наборе α, $\alpha \in B^n$, то он проводит и на всех 2^{n-m} наборах, в которых значения переменных с индексами $j_1, \ldots, j_m$ совпадают со значениями соответствующих переменных набора α. Таким образом, разность

$$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \left(\Theta(\Sigma'|_\alpha) - \Theta(\Sigma''|_\alpha)\right)$$

делится на 2^{n-m} и, следовательно, делится на 2^{n-k}

Лемма доказана. $\square$

Теорема 8.2

В классе $\mathfrak{U}^{\text{К}}$ не существует конечной полной системы тождеств.

Доказательство

Проведем доказательство от противного: пусть τ — КПСТ для ЭП КС $\mathfrak{U}^{\text{К}}$, и пусть n — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы τ. Тогда $\tau_n \rightrightarrows \tau$ и τ_n — КПСТ для $\mathfrak{U}^{\text{К}}$. Докажем, что $\tau_n \not\rightrightarrows t_6^{(n+1)}$. Для этого рассмотрим КС Σ', состоящую из простого цикла длины $(n+1)$, содержащего контакты с пометками x_i, $i \in [1, n+1]$, и имеющую единственный полюс с пометкой 1, которая является левой частью тождества $t_6^{(n+1)}$.

Продолжение доказательства

Очевидно, что ей эквивалентна КС Σ'', содержащая изолированный полюс 1, которая является правой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Если $\tau_n \Rightarrow t_6^{(n+1)}$, то $\Sigma' \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma''$. Согласно данным выше определениям, $\Theta(\Sigma') = 1$, $\Theta(\Sigma'') = 0$ и разность $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 1$ не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 8.2. Таким образом, тождество $t_6^{(n+1)}$ не выводится из системы τ_n, а значит, и из системы τ. Отсюда следует, что τ не может являться КПСТ для ЭП КС из класса $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$.

Теорема доказана. $\square$

§ 9. Операция суперпозиции и ее корректность для некоторых типов схем. Разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

В основе большинства структурных преобразований схем лежит ряд операций, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тождественной вершиной кратности* k, $k \geqslant 0$, если она одновременно является k-кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается *фиктивной*. Простейшими видами суперпозиции схем являются: 1) операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением; 2) операция *переименования выходов схемы* с возможным их дублированием или снятием; 3) операция *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является *суперпозицией схем* Σ'' *и* Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ'. Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ'. Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется *стыковкой*, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы Σ можно задать суперпозицией вида $\Sigma_2''(\Sigma_1''(\Sigma))$ (соответственно $\Sigma(\Sigma_1'(\Sigma_2'))$), где схемы Σ_i' и Σ_i'', $i = 1, 2$, состоят из тождественных вершин различной кратности.

Заметим также, что суперпозиция общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ всегда может быть сведена к стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, в свою очередь, может быть сведена к бесповторной стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ''. В случае стыковки, например, это означает, что схема Σ реализует набор функций вида $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}''$ и $\mathcal{F}'$ — наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно.
Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается *правильной*, если схема Σ обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине Σ, которая соответствует выходной вершине Σ', реализуется та же самая функция, что и в Σ'.
Заметим, что правильная суперпозиция вида $\Sigma''(\Sigma')$ автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины Σ' больше числа присоединяемых к ней входов Σ''. Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида $\Sigma''(\Sigma')$ позволяет одновременно использовать выходы Σ' в других суперпозициях.

Легко видеть, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ к выходам СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

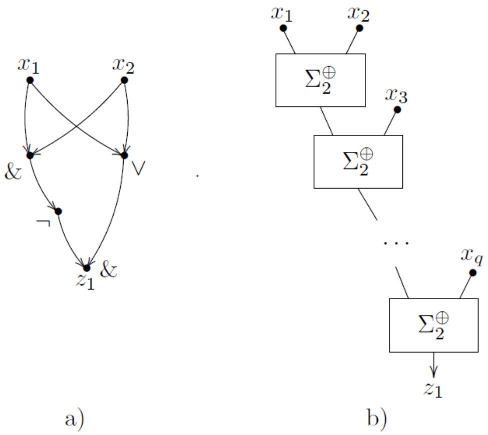


Рис. 9.1: пример суперпозиции СФЭ

На рис. 9.1a показана СФЭ $\Sigma_2^{\oplus}$, имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, а на рис. 9.1b — СФЭ $\Sigma_q^{\oplus}$, $q \geqslant 3$, которая является результатом «последовательной» суперпозиции $(q-1)$ схем $\Sigma_2^{\oplus}$ и реализует ФАЛ $\ell_q(x_1, \ldots, x_q)$ со сложностью $4q-4$.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС ориентированных (неориентированных) ребер без пометок, которые проводят при любых значениях управляющих входных БП в указанном (соответственно в любом) направлении и называются вентилями (соответственно *проводниками*). Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом. При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

Легко видеть, что перестановка входов (выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связаных с ними столбцов. Заметим также, что КС Σ, которая является объединением КС Σ' и Σ'', реализующих матрицы F' и F'' соответственно, реализует матрицу F вида[1]:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

[1]Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС Σ' меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС Σ'' в КС Σ, а внутренняя упорядоченность полюсов КС Σ' и Σ'' в КС Σ сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС Σ.

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций суперпозиции общего вида. Напомним, что суперпозиция общего вида сводится к последовательному выполнению операций переименования выходов, добавления тождественных вершин и стыковки. При этом стыковка, в свою очередь, сводится к снятию выходов, отождествлению входов и бесповторной стыковке.

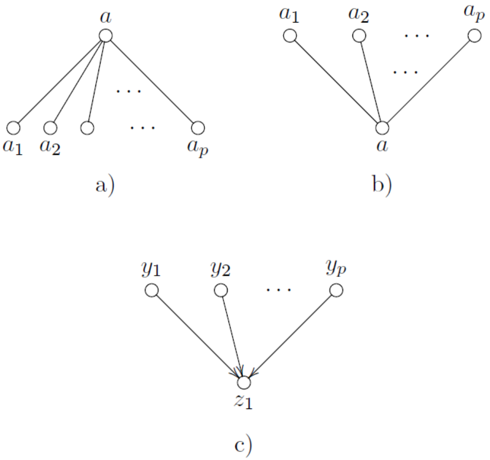


Рис. 9.2: проводящие и вентильная звезды порядка p

Заметим, что результат отождествления первых p входов КС Σ эквивалентен результату стыковки вида $\Sigma(\Sigma')$, а результат p-кратного дублирования первого выхода КС Σ — результату стыковки $\Sigma''(\Sigma)$, где КС Σ', Σ'' состоят из $(1,p)$-проводящей звезды (см. рис. 9.2a, a — вход) и тождественных вершин. Заметим также, что стыковка вида $\Sigma(\widehat{\Sigma})$, где КС $\widehat{\Sigma}$ состоит из $(p,1)$-проводящей звезды (см. рис. 9.2b, a — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых p выходов КС Σ.

В соответствии с общими правилами стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется[2] *правильной*, если для матриц F, F' и F'', реализуемых КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно, выполняется равенство

$$F = F' \cdot F''. \tag{9.1}$$

Указанная суперпозиция считается *корректной*, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы Σ' схемы Σ реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме Σ. Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

[2] Это определение соответствует «обычному» определению корректной суперпозиции в рамках модели так называемых преобразующих КС.

Заметим, что при правильной стыковке $(1,p)$-КС и $(p,1)$-КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ $\left(f'_1,\ldots,f'_p\right)$ и $\left(f''_1,\ldots,f''_p\right)$ соответственно, получается $(1,1)$-КС, реализующая ФАЛ $f'_1 f''_1 \vee \cdots \vee f'_p f''_p$, при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

Легко видеть, что операция переименования входов (выходов) КС без отождествления, операция объединения КС, а также операция последовательного соединения $(1, 1)$-КС корректны в любом случае. В то же время параллельное соединение $(1, 1)$-КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС, не является, в общем случае, корректной операцией суперпозиции, хотя является при этом правильной суперпозицией, так как полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС. Заметим, что корректное дизъюнктирование выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 9.2c).

Схема называется *разделительной по входам* (*выходам*), если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так $(p,1)$-схема $\Sigma'' = \Sigma''(y_1,\ldots,y_p;z_1)$, показанная на рисунке 9.2c, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка* p. Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить $(1,2^n)$ (соответственно $(2^n,1)$) контактное дерево порядка n (см. рис. 6.4). Будем говорить, что КС Σ от БП x_1, …, x_n *разделительна на наборе* $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$.

Следующее утверждение является обобщением известной леммы Шеннона.

Лемма 9.1

Пусть КС Σ *является результатом стыковки вида* $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, *а* F, F' *и* F'' *— матрицы, реализуемые КС* Σ, Σ' *и* Σ'' *соответственно. Тогда*

$$F \geqslant F' \cdot F'', \tag{9.2}$$

а если КС Σ'' *разделительна по входам или КС* Σ' *разделительна по выходам, то*

$$F = F' \cdot F''. \tag{9.3}$$

Доказательство

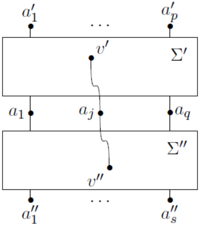
Пусть КС Σ является сначала результатом бесповторной стыковки (p, q)-КС Σ' и (q, s)-КС Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$. Пусть, кроме того, v' (v'') — произвольная вершина КС Σ' (соответственно Σ''), а ФАЛ f'_j (соответственно f''_j), $j \in [1, q]$, — ФАЛ проводимости от вершины v' к j-му выходу в КС Σ' (соответственно от j-го входа к вершине v'' в КС Σ''). Докажем, что для ФАЛ f — ФАЛ проводимости от вершины v' к вершине v'' в КС Σ, – справедливо неравенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f'_1 \cdot f''_1 \vee \cdots \vee f'_q \cdot f''_q, \tag{9.4}$$

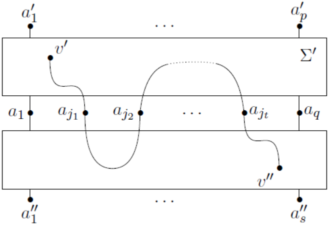
которое переходит в равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \cdots \vee f'_q \cdot f''_q, \tag{9.5}$$

если КС Σ' разделительна по выходам или КС Σ'' разделительна по входам.



a)



b)

Рис. 9.3: к доказательству леммы 9.1

Продолжение доказательства

Действительно, пусть a_j, $j \in [1,q]$, — вершина КС Σ, которая получается в результате присоединения j-го входа КС Σ'' к j-му выходу КС Σ' (см. рис. 9.3a). Справедливость неравенства (9.4) следует из того, что его правая часть описывает «суммарную» проводимость тех $(v' - v'')$-цепей КС Σ, которые проходят через вершины $a_1, \ldots, a_q$ ровно один раз (см. рис. 9.3a). Любая другая $(v' - v'')$-цепь КС Σ проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 9.3b) и в случае разделительности КС Σ' по выходам или разделительности КС Σ'' по входам имеет нулевую проводимость.

Продолжение доказательства

Из (9.4) и (9.5) непосредственно вытекают (9.2) и (9.3) с учетом того, что при $v' = a'_i$ и $v'' = a''_j$, где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, s]$, левая (правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы F (соответственно $F' \cdot F''$), расположенному в i-й строке и j-м столбце.

Продолжение доказательства

Пусть теперь КС Σ получается из КС Σ'' в результате применения операции отождествления входов, то есть Σ эквивалентна бесповторной стыковке вида $\Sigma''(\Sigma')$, где КС Σ' состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (9.2) имеет вид $F \geqslant \widehat{F}''$, где матрица $\widehat{F}''$ получается из матрицы F'' в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС Σ'', и по-прежнему переходит в равенство, если КС Σ'' разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС $\widetilde{\Sigma}''$, которая получается из КС Σ'' в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами $\widetilde{\Sigma}''$, следует разделительность КС Σ по входам.

Продолжение доказательства

Заметим, наконец, что стыковка общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида $\widehat{\Sigma}'' = \Sigma''\left(\check{\Sigma}''\right)$ и бесповторной стыковки вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где КС $\check{\Sigma}''$ состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС $\widehat{\Sigma}'$ получается из КС Σ' снятием некоторых выходов. При этом неравенство (9.2) (в случае разделительности КС Σ'' по входам равенство (9.3)) для КС Σ, Σ', Σ'' вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС $\widehat{\Sigma}''$, $\check{\Sigma}''$, Σ'' и КС Σ, $\widehat{\Sigma}'$, $\widehat{\Sigma}''$ в силу ассоциативности произведения матриц. Случай разделительности КС Σ' по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана. $\square$

Следствие 1

В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ, $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ', то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.

Действительно, полагая $v' = a'_i$ и $v'' = a_j$, где $i \in [1, p]$, а $j \in [1, q]$, из (9.5) получим требуемое равенство $f = f'_j$. Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

Следствие 2

Равенство (9.3) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.