Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 3

Логика предикатов:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2026, февраль–май

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

логика высказываний:

$$\mathrm{Shirk} \to \neg \mathrm{Pass}$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Pass}(x))$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

> **Если кто-то прогуливает лекции,**
> **то экзамен (зачёт) не сдаст его сосед**

логика предикатов:

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \to \neg \mathrm{Pass}(\textbf{neighbour}(x)))$$

Логика предикатов изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, основанными на **отношениях** между произвольными предметами

Формальный язык логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии «логика предикатов»

Предикат:

- preadicatum (латинский) — сказанное (сказуемое), объявленное[1]
- понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[2]

Кто-то	прогуливает	лекцию
(*субъект*)	(*предикат*)	(*объект*)

Чуть более общо и развёрнуто, предикат — это

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

1 Дворецкий. Латинско-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии «логика предикатов»

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

II

логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

III

логика
предикатов

Немного о названии «логика предикатов»

IV

логика

первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

Логика предикатов: алфавит

Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются фиксированные (именованные) предметы

Например: **я**, **2**, $\boldsymbol{\pi}$, **Солнце**, $\mathbf{c_1}$, ...

Предметные переменные

Ими обозначаются нефиксированные (безымянные) предметы

Они будут записываться привычно: x, y', z_4, ...

Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

Например: $+$, **сосед**, **lim**, ...

Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

Например: $<$, **является_соседом**, **красный**, ...

Каждому функциональному и каждому предикатному символу в языке сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathrm{s}^{(k)}$ — так будем записывать символ s местности k

Логика предикатов: алфавит

Логические операции

$\boxed{\text{Логические связки}}$ $\quad \& \quad \vee \quad \neg \quad \rightarrow$

$\boxed{\text{Кванторы}}$

Квантор всеобщности («для любого предмета»): $\forall$

Квантор существования («существует предмет»): $\exists$

Знаки препинания $\quad (\quad) \quad ,$

Логика предикатов: алфавит

Const, Var, Func, Pred — так будем обозначать соответственно множество всех констант, переменных, функциональных символов с сопоставленными им местностями и предикатных символов с сопоставленными им местностями

В логике предикатов содержится много языков (или, по-другому, — один язык, но параметризованный)

Логические операции, знаки препинания и множество Var считаются фиксированными, одинаковыми для всех языков

Остальные символы можно задавать по-разному в зависимости от того, какие понятия и обозначения предполагается использовать в записи высказываний

Тройка $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$ называеся сигнатурой языка, и для такой сигнатуры всегда будем полагать следующее:

- Множество Pred непусто
- Все три множества не более чем счётны

Логика предикатов: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов сигнатуры $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$:

$$\begin{array}{lcl} t & ::= & \mathrm{x} \;\mid\; \mathbf{c} \;\mid\; \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ \varphi & ::= & \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \;\mid \\ & & (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi) \;\mid \\ & & (\forall \mathrm{x}\, \varphi) \;\mid\; (\exists \mathrm{x}\, \varphi), \end{array}$$

где:

- φ — формула
- $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы
- $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$
- $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}$
- $\mathbf{f}^{(n)} \in \mathrm{Func}$
- $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathrm{Pred}$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Термы — это описания предметов,
об отношениях между которыми формулируются высказывания

Например: $(\mathrm{z} \in \mathrm{Var};\ \mathbf{1} \in \mathrm{Const};\ +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathrm{Func})$

1. Предмет, обозначенный переменной z:
$$\mathrm{z}$$
2. Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1}$$
3. Предмет, получающийся применением операции $+$ к (1) и (2):
$$+(\mathbf{1}, \mathrm{z})$$
4. Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к (1) и (3):
$$\cdot(\mathrm{z}, +(\mathbf{1}, \mathrm{z}))$$
5. Более наглядная инфиксная форма записи терма (4):
$$\mathrm{z} \cdot (\mathbf{1} + \mathrm{z})$$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Term — так будем записывать множество всех термов
(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращённая запись последовательности «$\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}$»

Если t — терм, то:
Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t
$t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним t, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$

Терм t — основной, если $\mathrm{Var}_t = \emptyset$

Пример: если $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$, $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in \mathrm{Const}$ и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathrm{Func}$, то терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{3})$$

является основным, а терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{x})$$

не является, и $\mathrm{Var}_{\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{x})} = \{\mathtt{x}\}$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \;::=\; \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\forall \mathrm{x}\, \varphi) \mid (\exists \mathrm{x}\, \varphi)$$

Формулы — это записи высказываний

об отношениях между предметами, записанными в виде термов

При этом отношения местности 0

можно трактовать как истину ($\{()\}$) или ложь ($\emptyset$)

Например: $(<^{(2)}, \text{чётно}^{(1)} \in \mathsf{Pred};\ +^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathsf{Var})$

1. Предмет y и предмет, получающийся из предметов x и y применением операции $+$, входят в отношение $<$: $<(\mathrm{y}, +(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$
   В инфиксной записи: $(\mathrm{y} < \mathrm{x} + \mathrm{y})$
2. Для любого предмета x верно (1):
   $$(\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x} + \mathrm{y}))$$
3. Если верно (2), то предмет y обладает свойством чётно:
   $$((\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x} + \mathrm{y})) \to \text{чётно}(\mathrm{y}))$$
4. Хотя бы для одного предмета y верно (3):
   $$(\exists \mathrm{y}\, ((\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x} + \mathrm{y})) \to \text{чётно}(\mathrm{y})))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathsf{Pred}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathsf{Term}$

Остальные формулы называются составными

Form — так будем записывать множество всех формул (*в алфавите с заданной сигнатурой*)

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

$\forall$, $\exists$, $\neg$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \;::=\; \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \;\mid\; (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi) \;\mid\; (\forall \mathrm{x}\; \varphi) \;\mid\; (\exists \mathrm{x}\; \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\, \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\, \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная y связана квантором $\exists$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная x связана квантором $\forall$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}\underbrace{(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\begin{aligned}\varphi \ ::= \ & \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \\ & (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)\end{aligned}$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \underbrace{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))}_{\text{Область действия квантора } \forall} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ P^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\forall x\ \varphi) \mid (\exists x\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x\ \varphi$ и $\exists x\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y(\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \to R(x))$$

Связанные вхождения переменной y

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \boxed{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \boxed{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Будем использовать следующие обозначения и понятия

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Если φ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — синоним φ, если $\mathrm{Var}_\varphi \subseteq \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$
- если $\mathrm{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

CForm[1] — множество всех замкнутых формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

1 Closed Formulae

Логика предикатов: семантика

Как и в логике высказываний, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — «мир, в котором живёт формула»

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций над предметами
  - (это смысл функциональных символов)
- отношений, связывающих предметы
  - (это смысл предикатных символов)

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[1]

1 не следует пугаться этого термина;
это и есть совокупность «предметы + операции + отношения»

Логика предикатов: семантика

Интерпретация (сигнатуры $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где:

- D — непустое множество предметов (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе $\mathbf{c}$

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

Логика предикатов: семантика

Пример

Сигнатура: Const = $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func = $\{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred = $\{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $\mathsf{D} = \{0, 1, 2\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = 0$, $\overline{\mathbf{c_2}} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(x)$

x	$\overline{\mathrm{P}}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(x, y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

Логика предикатов: семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$ терма $t(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$
на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации —
это **предмет**, задаваемый так:

- термы-переменные:

$$\mathtt{x}_\mathtt{i}[\widetilde{d^n}] = d_i$$

- термы-константы:

$$\mathbf{c}[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{c}}$$

- остальные термы:

$$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}])$$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$), в следующих случаях:

- атомарная формула:

  $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n]$

  $\Leftrightarrow$

  $\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]) = \mathbb{t}$

- отрицание:

  $\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d}^n]$

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$), в следующих случаях:

- конъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$ и $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$
- дизъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$
- импликация:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$), в следующих случаях:

- квантор всеобщности:
  $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}))[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow$
  для любого предмета d_0 из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[d_0, \widetilde{d}^n]$
- квантор существования:
  $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}))[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow$
  хотя бы для одного предмета d_0
  из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[d_0, \widetilde{d}^n]$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$), в следующих случаях: ...

$$\models$$

Этот знак в логике имеет много смыслов и названий,
и в только что изложенном смысле он называется

«отношение выполнимости»

$\varphi[\mathrm{x}_1/d_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/d_n]$ — синоним записи $\varphi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})[d_1, \ldots, d_n]$

Для замкнутой формулы φ в записи $\mathcal{I} \models \varphi[]$
будем, как правило, опускать квадратные скобки,
писать $\mathcal{I} \models \varphi$: формула выполняется в интерпретации

Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

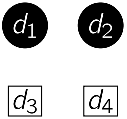
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

- $C(x)$: «x — круг»
- $S(x)$: «x — квадрат»
- $B(x)$: «x — чёрный предмет»
- $W(x)$: «x — белый предмет»
- $U(x, y)$: «предмет x лежит под предметом y»

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Формула содержательно прочитывается так:

Для каждого предмета x: если он является белым и является квадратом, то существует предмет y, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет x лежит под предметом y

Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

d_1 d_2

$\boxed{d_3}$ $\boxed{d_4}$

и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))$$

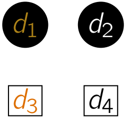
Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $\mathrm{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_1]$

2. $\mathrm{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_2]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $\mathrm{x} \leftarrow d_3$:

   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

d_1 d_2

$\boxed{d_3}$ $\boxed{d_4}$

и такую формулу φ:

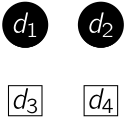
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $\mathrm{x} \leftarrow d_4$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_4]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$$

А значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathrm{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))}$$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: Const $= \emptyset$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: $\mathrm{D} = \{0, 1, 2\}$

оценки функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x, y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\ (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

Значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \not\models \forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))}$$