

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 3

Логика предикатов:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст**

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ:

$\text{Shirk} \rightarrow \neg \text{Pass}$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

$$\forall x (\text{Shirk}(x) \rightarrow \neg \text{Pass}(x))$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) не сдаст его сосед

логика предикатов:

$$\forall x (\text{Shirk}(x) \rightarrow \neg \text{Pass}(\text{neighbour}(x)))$$

Логика предикатов изучает законы
причинно-следственной зависимости между утверждениями,
основанными на **отношениях** между произвольными **предметами**

Формальный язык логики предикатов
ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии «логика предикатов»

Предикат:

- ▶ preadicatum (латинский) — сказанное (сказуемое), объявленное¹
- ▶ понятие, определяющее предмет суждения (субъект)²

Кто-то прогуливает лекцию
(субъект) (предикат) (объект)

Чуть более общо и развёрнуто, предикат — это

- ▶ свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- ▶ отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

¹ Дворецкий. Латинско-русский словарь

² Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии «логика предикатов»

I

**классическая
логика
предикатов
первого порядка**

Немного о названии «логика предикатов»

II

**логика
предикатов
первого порядка**

Немного о названии «логика предикатов»

III

**логика
предикатов**

Немного о названии «логика предикатов»

IV

логика

первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

Будем использовать такое название:

**логика
предикатов**

Логика предикатов: алфавит

Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются фиксированные (именованные) предметы

Например: **я**, **2**, **π** , **Солнце**, **c_1** , ...

Предметные переменные

Ими обозначаются нефиксированные (безымянные) предметы

Они будут записываться привычно: **x** , **y'** , **z_4** , ...

Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

Например: **+**, **сосед**, **lim**, ...

Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

Например: **$<$** , **является_соседом**, **красный**, ...

Каждому функциональному и каждому предикатному символу в языке сопоставляется особое натуральное число — **местность** $s^{(k)}$ — так будем записывать символ s местности k

Логика предикатов: алфавит

Логические операции

Логические СВЯЗКИ

$\&$ $\vee$ $\neg$ $\rightarrow$

Кванторы

Квантор всеобщности («для любого предмета»): $\forall$

Квантор существования («существует предмет»): $\exists$

Знаки препинания () ,

Логика предикатов: алфавит

$Const$, Var , $Func$, $Pred$ — так будем обозначать соответственно множество всех констант, переменных, функциональных символов с сопоставленными им местностями и предикатных символов с сопоставленными им местностями

В логике предикатов содержится много языков (или, по-другому, — один язык, но параметризованный)

Логические операции, знаки препинания и множество Var считаются фиксированными, одинаковыми для всех языков

Остальные символы можно задавать по-разному в зависимости от того, какие понятия и обозначения предполагается использовать в записи высказываний

Тройка $\langle Const, Func, Pred \rangle$ называется **сигнатурой** языка, и для такой сигнатуры всегда будем полагать следующее:

- ▶ Множество $Pred$ непусто
- ▶ Все три множества не более чем счётны

Логика предикатов: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов сигнатуры $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$:

$$\begin{aligned} t &::= x \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ \varphi &::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid \\ &\quad (\varphi \ \& \ \varphi) \mid (\varphi \ \vee \ \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid \\ &\quad (\forall x \ \varphi) \mid (\exists x \ \varphi), \end{aligned}$$

где:

- ▶ φ — формула
- ▶ $t, t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы
- ▶ $x \in \text{Var}$
- ▶ $\mathbf{c} \in \text{Const}$
- ▶ $\mathbf{f}^{(n)} \in \text{Func}$
- ▶ $P^{(k)} \in \text{Pred}$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= x \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Термы — это описания предметов,
об отношениях между которыми формулируются высказывания

Например:

$$(z \in \text{Var}; \mathbf{1} \in \text{Const}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \text{Func})$$

1. Предмет, обозначенный переменной z :

z

2. Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$:

$\mathbf{1}$

3. Предмет, получающийся применением операции $+$ к (1) и (2):

$+(\mathbf{1}, z)$

4. Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к (1) и (3):

$\cdot(z, +(\mathbf{1}, z))$

5. Более наглядная **инфиксная форма записи** терма (4):

$z \cdot (\mathbf{1} + z)$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= x \mid c \mid f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Term — так будем записывать множество всех термов
(над заданными множествами Var , Const , Func)

$\widetilde{x}^n$ — сокращённая запись последовательности « $x_1, \dots, x_n$ »

Если t — терм, то:

Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t

$t(\widetilde{x}^n)$ — синоним t , если $\text{Var}_t \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

Терм t — **основной**, если $\text{Var}_t = \emptyset$

Пример: если $x \in \text{Var}$, $1, 3 \in \text{Const}$ и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \text{Func}$, то терм

$$3 \cdot (1 + 3)$$

является основным, а терм

$$3 \cdot (1 + x)$$

не является, и $\text{Var}_{3 \cdot (1+x)} = \{x\}$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid$$

$$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Формулы — это записи высказываний

об отношениях между предметами, записанными в виде термов

При этом отношения местности 0

можно трактовать как истину ($\{\{\}\}$) или ложь ($\emptyset$)

Например: $(<^{(2)}, \text{чётно}^{(1)}) \in \text{Pred}; +^{(2)} \in \text{Func}; x, y \in \text{Var}$

1. Предмет y и предмет, получающийся из предметов x и y применением операции $+$, входят в отношение $<$: $<(y, +(x, y))$

В инфиксной записи: $(y < x + y)$

2. Для любого предмета x верно (1):

$$(\forall x (y < x + y))$$

3. Если верно (2), то предмет y обладает свойством чётно:

$$((\forall x (y < x + y)) \rightarrow \text{чётно}(y))$$

4. Хотя бы для одного предмета y верно (3):

$$(\exists y ((\forall x (y < x + y)) \rightarrow \text{чётно}(y)))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Формула **атомарна** (является **атомом**), если имеет вид $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$, где $P^{(k)} \in \text{Pred}$ и $t_1, t_2, \dots, t_k \in \text{Term}$

Остальные формулы называются **составными**

Form — так будем записывать множество всех формул
(в алфавите с заданной сигнатурой)

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

$\forall, \exists, \neg$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\rightarrow$

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$\forall x \neg P(x) \& \exists y R(x, y) \rightarrow \exists x (\neg P(x) \vee P(y))$

$\forall x (\neg P(x)) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow \exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))$

$(\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$

$((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$

$((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))))$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid \\ (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Переменная y связана квантором $\exists$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$

Переменная **x** связана квантором $\forall$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Область действия квантора $\exists$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

Область действия квантора $\forall$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$



Связанные вхождения переменной y

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

 **Связанное вхождение** переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$


Свободное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid \\ (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Будем использовать следующие обозначения и понятия

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Если φ — формула, то:

- ▶ $\varphi(\tilde{x}^n)$ — синоним φ , если $\text{Var}_\varphi \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ если $\text{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — **замкнутая формула**, или **предложение**

CForm^1 — множество всех замкнутых формул
(в алфавите с заданной сигнатурой)

¹ Closed Formulae

Логика предикатов: семантика

Как и в логике высказываний, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — «мир, в котором живёт формула»

Интерпретация состоит из

- ▶ предметов, населяющих мир
- ▶ операций над предметами
 - ▶ (это смысл функциональных символов)
- ▶ отношений, связывающих предметы
 - ▶ (это смысл предикатных символов)

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы¹

¹ не следует пугаться этого термина;

это и есть совокупность «предметы + операции + отношения»

Логика предикатов: семантика

Интерпретация (сигнатуры $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$) — это система $\langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где:

- ▶ D — непустое множество **предметов**
(**область интерпретации; предметная область; универсум**)
- ▶ $\overline{\text{Const}} : \text{Const} \rightarrow D$ — **оценка констант**
- ▶ $\overline{\text{Func}} : \text{Func} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow D)$ — **оценка функциональных символов**
- ▶ $\overline{\text{Pred}} : \text{Pred} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$ — **оценка предикатных символов**

$\overline{c} = \overline{\text{Const}}(c)$ — **предмет**, сопоставленный константе c

$\overline{f} = \overline{\text{Func}}(f) : D^n \rightarrow D$ — **функция**, сопоставленная символу $f^{(n)}$

$\overline{P} = \overline{\text{Pred}}(P) : D^n \rightarrow \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ — **предикат**, сопоставленный символу $P^{(n)}$

Логика предикатов: семантика

Пример

Сигнатура: $\text{Const} = \{c_1, c_2\}$, $\text{Func} = \{f^{(1)}\}$, $\text{Pred} = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $D = \{0, 1, 2\}$

оценка констант: $\overline{c_1} = 0$, $\overline{c_2} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\overline{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

Логика предикатов: семантика термов

Значение $t(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ терма $t(\tilde{x}^n)$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации — это **предмет**, задаваемый так:

- ▶ термы-переменные:

$$x_i[\tilde{d}^n] = d_i$$

- ▶ термы-константы:

$$c[\tilde{d}^n] = \bar{c}$$

- ▶ остальные термы:

$$f(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n] = \bar{f}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n])$$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$), в следующих случаях:

- ▶ атомарная формула:

$$\mathcal{I} \models P(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\overline{P}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n]) = \mathbb{t}$$

- ▶ отрицание:

$$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\tilde{d}^n]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n]$$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$), в следующих случаях:

► конъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \& \psi)[\tilde{d}^n]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ и } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

► дизъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\tilde{d}^n]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

► импликация:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$), в следующих случаях:

► квантор всеобщности:

$$\mathcal{I} \models (\forall x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow$$

для любого предмета d_0 из области интерпретации верно
 $\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$

► квантор существования:

$$\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow$$

хотя бы для одного предмета d_0
из области интерпретации верно
 $\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$

Логика предикатов: семантика формул

Говорят, что формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполняется в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$), в следующих случаях: ...

$\models$

Этот знак в логике имеет много смыслов и названий,
и в только что изложенном смысле он называется

«ОТНОШЕНИЕ ВЫПОЛНИМОСТИ»

$\varphi[x_1/d_1, \dots, x_n/d_n]$ — синоним записи $\varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$

Для замкнутой формулы φ в записи $\mathcal{I} \models \varphi[]$
будем, как правило, опускать квадратные скобки,
писать $\mathcal{I} \models \varphi$: формула выполняется в интерпретации

Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$: « x — круг»

$S(x)$: « x — квадрат»

$B(x)$: « x — чёрный предмет»

$W(x)$: « x — белый предмет»

$U(x, y)$: «предмет x лежит под предметом y »

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Формула содержательно прочитывается так:

Для каждого предмета x : если он является белым и является квадратом, то существует предмет y , такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет x лежит под предметом y

Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры



Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $x \leftarrow d_1$:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models W(x)[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models (W(x) \& S(x))[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_1]$

2. $x \leftarrow d_2$:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models W(x)[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models (W(x) \& S(x))[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_2]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $x \leftarrow d_3$:

- ▶ $\mathcal{I} \models B(y)[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \models C(y)[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \models U(x, y)[y/d_1, x/d_3]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (B(y) \& C(y) \& U(x, y))[y/d_1, x/d_3]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_3]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_3]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $x \leftarrow d_4$:

- ▶ $\mathcal{I} \models B(y)[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \models C(y)[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \models U(x, y)[y/d_2, x/d_4]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (B(y) \& C(y) \& U(x, y))[y/d_2, x/d_4]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$$

А значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \models \forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))}$$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: $\text{Const} = \emptyset$, $\text{Func} = \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, $\text{Pred} = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

предметная область: $D = \{0, 1, 2\}$

оценки функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

и такую формулу φ :

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/0, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[1]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[1]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[1]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[1]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[1]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/2, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/2, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$$\bar{f}(x)$$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$$\bar{P}(x)$$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$$\bar{R}(x, y)$$

$\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/2, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$$\bar{f}(x)$$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$$\bar{P}(x)$$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$$\bar{R}(x, y)$$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$$\bar{f}(x)$$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$$\bar{P}(x)$$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$$\bar{R}(x, y)$$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

Значит,

$$\mathcal{I} \not\models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$