# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 3

Логика предикатов:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) он не сдаст**

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) он не сдаст**

*логика высказываний*:

$$\mathrm{Shirk} \to \neg \mathrm{Pass}$$

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) он не сдаст**

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \to \neg \mathrm{Pass}(x))$$

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) не сдаст его сосед**

*логика предикатов*:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Shirk}(\mathrm{x}) \rightarrow \neg \mathrm{Pass}(\mathbf{neighbour}(\mathrm{x})))$$

**Логика предикатов** изучает законы
причинно-следственной зависимости между утверждениями,
основанными на **отношениях** между произвольными предметами

**Формальный язык** логики предикатов
ориентирован на описание таких отношений

# Немного о названии «логика предикатов»

**Предикат** (лат. praedicatum — сказанное, сказуемое):

понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[1]

| Кто-то | прогуливает | лекцию |
|---|---|---|
| (*субъект*) | (*предикат*) | (*объект*) |

В более общем смысле, предикат — это

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

1 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

# Немного о названии «логика предикатов»

I

**классическая**

**логика**

**предикатов**

**первого порядка**

# Немного о названии «логика предикатов»

II

**логика**
**предикатов**
**первого порядка**

# Немного о названии «логика предикатов»

III

**логика**
**предикатов**

# Немного о названии «логика предикатов»

IV

**логика**

**первого порядка**

# Немного о названии «логика предикатов»

Будем использовать такое название:

**логика**
**предикатов**

# Логика предикатов: алфавит

## Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются конкретные (именованные, фиксированные) предметы

*Например:* **я**, **2**, $\pi$, **Солнце**, $\mathbf{c_1}$, ...

Const — множество всех констант

Предметные переменные

Ими обозначаются безымянные (нефиксированные) предметы

Они будут записываться привычно: $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}'$, $\mathtt{z}_4$, ...

Var — множество всех переменных

Далее это множество полагается счётным и заданным однозначно

# Логика предикатов: алфавит

## Базовые символы

### Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

*Например:* $+$, **сосед**, **lim**, ...

Каждому функциональному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathbf{f}^{(k)}$ — запись функционального символа $\mathbf{f}$ с обозначением местности $k$

Func — множество всех функциональных символов с сопоставленными им местностями

### Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

*Например:* $<$, **является_соседом**, **красный**, ...

При задании языка логики предикатов каждому предикатному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathrm{P}^{(k)}$ — запись предикатного символа $\mathrm{P}$ с обозначением местности $k$

Pred — множество всех предикатных символов с сопоставленными им местностями

# Логика предикатов: алфавит

## Логические операции

Логические связки $\&$ $\vee$ $\neg$ $\rightarrow$

Кванторы

Квантор всеобщности («для любого предмета»): $\forall$

Квантор существования («существует предмет»): $\exists$

## Знаки препинания ( ) ,

Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка

$$\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$$

Устройство языка логики предикатов
однозначно определяется выбором сигнатуры:
все символы, не обозначенные в сигнатуре, определены однозначно

# Логика предикатов: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$
\begin{array}{rcl}
t & ::= & \mathrm{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
\varphi & ::= & \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid \\
& & (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid \\
& & (\forall \mathrm{x}\, \varphi) \mid (\exists \mathrm{x}\, \varphi),
\end{array}
$$

где:

- $\varphi$ — формула
- $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы
- $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$
- $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}$
- $\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func}$
- $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathsf{Pred}$

# Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

При помощи термов описываются предметы, получающиеся в результате применения заданных функций (операций) к заданным предметам

**Например:** $(\mathtt{z} \in \mathsf{Var};\ \mathbf{1} \in \mathsf{Const};\ +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathsf{Func})$

1. Предмет, обозначенный переменной $\mathtt{z}$:
$$\mathtt{z}$$
2. Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1}$$
3. Предмет, получающийся применением операции $+$ к (1) и (2):
$$+(\mathbf{1}, \mathtt{z})$$
4. Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к (1) и (3):
$$\cdot(\mathtt{z}, +(\mathbf{1}, \mathtt{z}))$$
5. Более наглядная инфиксная форма записи терма (4):
$$\mathtt{z} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{z})$$

# Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Term — множество всех термов

(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращённая запись последовательности «$\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}$»

Если $t$ — терм, то:

$\mathrm{Var}_t$ — множество всех переменных, входящих в терм $t$

$t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним $t$, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$

Терм $t$ — основной, если $\mathrm{Var}_t = \emptyset$

**Пример:** если $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$, $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in \mathrm{Const}$ и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathrm{Func}$, то терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{3})$$

является основным, а терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{x})$$

не является

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

При помощи формул описываются отношения между предметами, строящиеся из «базовых» отношений при помощи логических операций

В некоторых случаях (*отношение местности 0*) формулой может описываться и высказывание, оцениваемое как истина или ложь

**Например:** $(\mathrm{P}^{(2)}, \mathrm{R}^{(1)} \in \mathsf{Pred};\ \mathbf{f}^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathsf{Var})$

1. Предмет $\mathrm{y}$ и предмет, получающийся из предметов $\mathrm{x}$ и $\mathrm{y}$ применением операции $\mathbf{f}$, входят в отношение $\mathrm{P}$:
$$\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$
2. Для любого предмета $\mathrm{x}$ верно (1):
$$(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$
3. Если верно (2), то предмет $\mathrm{y}$ обладает свойством $\mathrm{R}$:
$$((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y}))$$
4. Хотя бы для одного предмета $\mathrm{y}$ верно (3)
$$(\exists \mathrm{y}\ ((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y})))$$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где $\mathrm{P}^{(k)} \in$ Pred и $t_1, t_2, \ldots, t_k \in$ Term

Остальные формулы называются составными

Form — множество всех формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

**Приоритет логических операций** (в порядке убывания):

$\forall$, $\exists$, $\neg$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

**Как работают приоритеты (пример)**

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$
$$\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$
$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$
$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$
$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathtt{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathtt{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathtt{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathtt{y}(\forall \mathtt{x} \neg \mathrm{P}(\mathtt{y}, \mathbf{f}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \to \mathrm{R}(\mathtt{x}))$$

Переменная $\mathtt{y}$ связана квантором $\exists$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная $\mathrm{x}$ связана квантором $\forall$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}\underbrace{(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Область действия квантора $\forall$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанные вхождения переменной $\mathrm{y}$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной $\mathrm{x}$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной $\mathrm{x}$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathtt{x}\, \varphi) \ \mid \ (\exists \mathtt{x}\, \varphi)$$

$\mathsf{Var}_\varphi$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

Если $\varphi$ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним $\varphi$, если $\mathsf{Var}_\varphi \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- если $\mathsf{Var}_\varphi = \emptyset$, то $\varphi$ — замкнутая формула, или предложение

$\mathsf{CForm}$[1] — множество всех замкнутых формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

1 Closed Formulae

# Логика предикатов: семантика

Как и в логике высказываний, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — «мир, в котором живёт формула»

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций над предметами
  - (это смысл **функциональных символов**)
- отношений, связывающих предметы
  - (это смысл **предикатных символов**)

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[1]

1 не следует пугаться этого термина;
это и есть совокупность «предметы + операции + отношения»

# Логика предикатов: семантика

Интерпретация (*сигнатуры* $\langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$) — это система $\langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle$, где:

- $\mathsf{D}$ — непустое множество предметов
  (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathsf{Const}} : \mathsf{Const} \to \mathsf{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathsf{Func}} : \mathsf{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathsf{D}^n \to \mathsf{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathsf{Pred}} : \mathsf{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathsf{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathsf{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе $\mathbf{c}$

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathsf{Func}}(\mathbf{f}) : \mathsf{D}^n \to \mathsf{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathsf{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathsf{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

# Логика предикатов: семантика

## Пример

Сигнатура: Const $= \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $\mathrm{D} = \{0, 1, 2\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = 0$, $\overline{\mathbf{c_2}} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

| $\mathrm{x}$ | $\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

| $\mathrm{x}$ | $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

| $\mathrm{x}$ \ $\mathrm{y}$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

# Логика предикатов: семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ терма $t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации — это **предмет**, задаваемый так:

- термы-переменные:
$$\mathtt{x_i}[\widetilde{d}^n] = d_i$$
- термы-константы:
$$\mathbf{c}[\widetilde{d}^n] = \overline{\mathbf{c}}$$
- остальные термы:
$$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n])$$

# Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- атомарная формула:
  $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  $\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]) = \mathbb{t}$

- отрицание:
  $\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$

# Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- конъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \text{ и } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$
- дизъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$
- импликация:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$

# Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- квантор всеобщности:
  $\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}))[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  **для любого** предмета $d_0$ из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[d_0, \widetilde{d}^n]$
- квантор существования:
  $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_0\ \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}))[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  **хотя бы для одного** предмета $d_0$ из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[d_0, \widetilde{d}^n]$

$\varphi[\mathtt{x}_1/d_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/d_n]$ — синоним записи $\varphi(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n})[d_1, \ldots, d_n]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

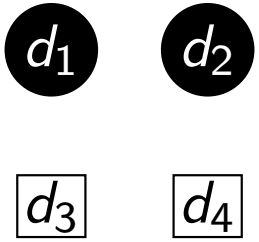
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$\mathrm{C}(\mathtt{x})$: «$\mathtt{x}$ — круг»
$\mathrm{S}(\mathtt{x})$: «$\mathtt{x}$ — квадрат»
$\mathrm{B}(\mathtt{x})$: «$\mathtt{x}$ — чёрный предмет»
$\mathrm{W}(\mathtt{x})$: «$\mathtt{x}$ — белый предмет»
$\mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$: «предмет $\mathtt{x}$ лежит под предметом $\mathtt{y}$»

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))$$

Формула содержательно прочитывается так:

Для каждого предмета $\mathtt{x}$: если он является белым и является квадратом, то существует предмет $\mathtt{y}$, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет $\mathtt{x}$ лежит под предметом $\mathtt{y}$

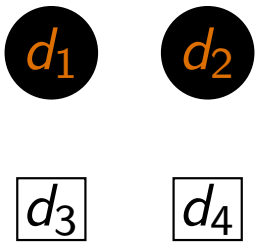
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

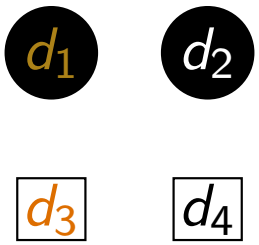
Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathrm{x}$

1. $\mathrm{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$

2. $\mathrm{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

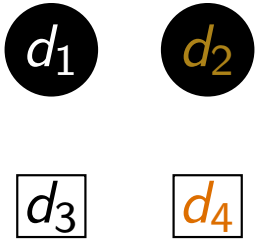
Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathrm{x}$

3. $\mathrm{x} \leftarrow d_3$:

   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

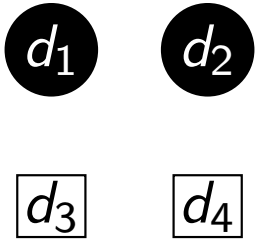
Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathrm{x}$

4. $\mathrm{x} \leftarrow d_4$:

   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$$

А значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))}$$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: Const $= \emptyset$, Func $= \{\mathsf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: D $= \{0, 1, 2\}$

оценки функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathsf{f}}(\mathrm{x})$

| $\mathrm{x}$ | $\overline{\mathsf{f}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

| $\mathrm{x}$ | $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

| $\mathrm{x}$ \ $\mathrm{y}$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathsf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathsf{f}(y))[1]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathsf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathsf{f}(y)))[1]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathsf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathsf{f}(y)))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathsf{f}(y))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathsf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathsf{f}(y)))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathsf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathsf{f}(y)))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathsf{f}(y)))[y/2, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/2, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y)))[y/2, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))$$

$\overline{\mathsf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathsf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathsf{f}(y))))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ |
| 1 | $\mathbb{f}$ |
| 2 | $\mathbb{t}$ |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ |
| 1 | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ |
| 2 | $\mathbb{f}$ | $\mathbb{t}$ | $\mathbb{t}$ |

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

Значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \not\models \forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))}$$