Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 10

Размеченные системы переходов
Справедливость для систем переходов
Справедливость и LTL

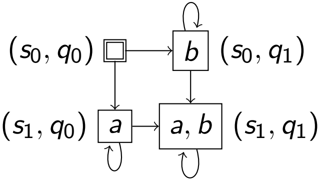
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступительный пример

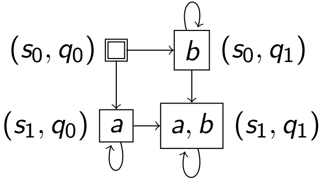
Рассмотрим такие две модели Крипке:

Асинхронная композиция этих моделей Крипке устроена так:



Насколько «реалистична» такая композиция?

Вступительный пример



Представим себе, что исходные модели отвечают программам π_1 и π_2, асинхронная композиция — их параллельному выполнению, a означает, что π_1 выполнила своё единственное действие и b — что π_2 выполнила своё единственное действие

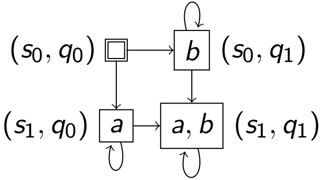
«Реальность» говорит, что если наблюдать за независимым параллельным выполнением π_1 и π_2 достаточно долго, то каждая из программ выполнит своё действие

При этом в асинхронной композиции есть вычисление

$$(s_0, q_0) \to (s_1, q_0) \to (s_1, q_0) \to (s_1, q_0) \to \ldots,$$

в котором π_2 не выполняет ни одного действия

Вступительный пример



Каждый конечный начальный путь в модели можно признать реалистичным: в зависимости от медлительности π_2, программа π_1 может выполнить своё действие любое наперёд заданное число раз

Но бесконечный путь, в котором π_2 не выполняет ни одного действия, не соответствует реальности

Можно сказать, что такой путь **несправедлив** по отношению к π_2, так как не даёт ей права выполнить даже одно действие

Точно так же вычисление

$$(s_0, q_0) \to (s_0, q_1) \to (s_0, q_1) \to (s_0, q_1) \to \dots$$

несправедливо по отношению к π_1

Так в моделях появляется понятие **справедливости**

Системы переходов

Для наиболее полного строгого задания справедливости обобщим модель Крипке, добавив обозначение выполняемых **действий** на переходы

Размеченная система переходов (с.п.) над множеством атомарных высказываний AP и множеством действий Act — это система $TS = (S, S_0, \to, L)$, отличающаяся от модели Крипке только устройством множества переходов $\to$:

- $\to \subseteq S \times \mathrm{Act} \times S$

С.п. будем называть конечной, если конечны множества S, AP и Act

Переход $(s, \alpha, s') \in \to$ будем также понимать как помеченную дугу $s \xrightarrow{\alpha} s'$

Будем говорить, что при выполнении перехода $s \xrightarrow{\alpha} s'$ выполняется действие α

Записью $\mathrm{Act}(TS, s)$ для с.п. TS и состояния s обозначим множество действий, которые могут выполниться в с.п. из состояния s:

$$\mathrm{Act}((S, S_0, \to, L), s) = \{\alpha \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Виды справедливости

Принято рассматривать три вида справедливости:

1. Безусловная справедливость: система бесконечно часто выполняет действия множества A
   - Пример справедливости: программа π_1 должна бесконечно часто выполнять свои переходы
   - Соответствующая несправедливость: начиная с некоторого момента π_1 всегда может выполнить переход, но ни разу не выполняет

Виды справедливости

Принято рассматривать три вида справедливости:

2. Сильная справедливость: если система бесконечно часто получает возможность выполнить действие множества A, то она бесконечно часто выполняет действия множества B

   - Пример справедливости: если π_1 бесконечно часто получает возможность послать данные на печать, то она будет бесконечно часто посылать данные на печать

   - Соответствующая несправедливость: принтер бесконечно часто освобождается (и появляется возможность послать ему данные), но π_1 ни разу не отправляет данные на печать

Виды справедливости

Принято рассматривать три вида справедливости:

3. Слабая справедливость: если система почти всегда имеет возможность выполнить действие из A, то она бесконечно часто выполняет действие из B

   - Пример справедливости: если принтер почти всегда ожидает данные на печать, то он будет бесконечно часто получать эти данные

   - Соответствующая несправедливость: начиная с некоторого момента принтер всегда ожидает данные на печать, но так их и не получает

Справедливость в системах переходов

Рассмотрим бесконечный путь ρ вида

$$s_0 \xrightarrow{\alpha_0} s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$$

системы переходов TS

Этот путь для заданного множеств действий A будем называть

- безусловно A-справедливым, если действия из A выполняются в ρ бесконечно часто
- сильно A-справедливым, если верно хотя бы одно из двух:
  - соотношение $\mathrm{Act}(TS, s_i) \cap A \neq \emptyset$ выполняется для не более чем конечного числа моментов времени i
  - ρ безусловно справедлив относительно A
- слабо A-справедливым, если верно хотя бы одно из двух:
  - число моментов времени i, для которых верно $\mathrm{Act}(TS, s_i) \cap A = \emptyset$, бесконечно
  - ρ безусловно справедливо относительно A

Справедливость в системах переходов

Рассмотрим бесконечный путь ρ вида

$$s_0 \xrightarrow{\alpha_0} s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$$

системы переходов TS

Ограничениями справедливости назовём тройку $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w)$, где $\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w \subseteq 2^{\mathrm{Act}}$

Путь ρ будем называть $\mathcal{F}$-справедливым, если он

- безусловно A-справедлив относительно каждого A из $\mathcal{F}_u$,
- сильно A-справедлив относительно каждого A из $\mathcal{F}_s$ и
- слабо A-справедлив относительно A из $\mathcal{F}_w$

Обозначим записью $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(TS)$ множество трасс всех $\mathcal{F}$-справедливых путей с.п. TS

Справедливость и LTL

Будем говорить, что ltl-формула выполняется на с.п. TS в ограничениях справедливости $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w)$ ($TS, \mathcal{F} \models \varphi$), если $\mathsf{Tr}_{\mathcal{F}}(TS) \subseteq \mathsf{Tr}(\varphi)$

Пусть возможность выполнить действие из A на следующем переходе отвечает ltl-формуле Φ_A, а выполнение действия A на следующем переходе отвечает формуле Ψ_A

Сопоставим ограничениям $\mathcal{F}$ формулу $\Phi_{\mathcal{F}}$ следующего вида:

$$(\mathop{\&}_{A \in \mathcal{F}_u} \mathbf{GF}\Phi_A) \& (\mathop{\&}_{A \in \mathcal{F}_s} (\mathbf{GF}\Phi_A \rightarrow \mathbf{GF}\Psi_A)) \& (\mathop{\&}_{A \in \mathcal{F}_w} (\mathbf{FG}\Phi_A \rightarrow \mathbf{GF}\Psi_A))$$

Утверждение (о справедливости в LTL). **Для любых конечной с.п. TS, ограничений справедливости $\mathcal{F}$ и формулы φ верно:**

$$TS, \mathcal{F} \models \varphi \Leftrightarrow TS \models \Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow \varphi$$

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно, вспомнив семантику ltl-формул и утверждения о формулах вида $\mathbf{FG}\psi$ и $\mathbf{GF}\psi$