Математическая логика

(mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 12–13

Натуральное исчисление высказываний
Натуральное исчисление предикатов
Исчисление предикатов гильбертовского типа

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Вступление

Логическое исчисление включает в себя:

- алфавит и синтаксис *формул*
- множество *аксиом* — формул, верных без доказательства и заданных, как правило, в виде *схем формул*
- множество *правил вывода* $(\dfrac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\Phi})$, по которым из одних формул (порождаемых схемами $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$) выводятся другие формулы (порождаемые схемой Φ)

Вывод формулы φ из множества формул Γ (в исчислении) — это последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varphi$, в которой последовательно выписаны (а) формулы из Γ, (б) аксиомы и (в) формулы, выводящиеся из ранее выписанных по правилам исчисления

Формула *выводима*, если существует вывод этой формулы

Формула *доказуема*, если она выводима из пустого множества формул, и соответствующий вывод — *доказательство* формулы

Вступление

Логические исчисления, *в числе прочего*, применяются для формализации и анализа доказательств, записанных на естественном языке, и для этого, как правило:

- Выбираются как можно более простые "самоочевидные" аксиомы, и чем меньше аксиом, тем лучше
- В правилах вывода записываются все основные способы построения "естественных" математических доказательств
- Исчисление в целом устраивается так, чтобы доказуемость формул в нём соответствовала верности утверждений, записанных в виде этих формул

Исчисления такого вида принято называть

натуральными исчислениями

Для начала обсудим натуральное исчисление ($\mathfrak{N}_p$), предназначенное для доказательства *общезначимости* формул *логики высказываний*

Натуральное исчисление высказываний

Вернёмся к примеру из предыдущей лекции:

Утверждение. $\models A \,\&\, B \to A \vee B$

Доказательство. Предположим, что верно $A \,\&\, B$

Тогда, в частности, верно A

Значит, верно и $A \vee B$

Так как в предположении о верности $A \,\&\, B$
обоснована верность $A \vee B$, верно и $A \,\&\, B \to A \vee B$ ▼

На каждом шаге доказательства говорится, что
некоторая формула (φ) верна в предположении о том,
что верны некоторые другие формулы (множества Γ)

Запишем такое высказывание в виде секвенции: $\Gamma \vdash \varphi$

Тогда доказательство, предложенное выше,
можно представить в виде последовательности секвенций:

$$A \,\&\, B \vdash A, \quad A \,\&\, B \vdash A \vee B, \quad \vdash A \,\&\, B \to A \vee B$$

Объявим секвенции *формулами исчисления*

Натуральное исчисление высказываний: аксиомы

Чтобы не путать “формулы” логики высказываний
и “формулы” исчисления, будем для формул исчисления
использовать **только** термин “секвенции”

Аксиомами исчисления $\mathfrak{N}_p$ объявим секвенции,
порождаемые схемой

$$\mathfrak{A}\colon \Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

с параметрами A (произвольная формула) и Γ (произвольное
множество формул)

Содержательное прочтение схемы:
Если среди текущих предположений есть формула A,
то эта формула верна в текущих предположениях

Натуральное исчисление высказываний: правила вывода

Правила вывода исчисления $\mathfrak{N}_p$
(которые будут обсуждаться дальше) можно трактовать двояко:

- Техническая трактовка: правила исчисления $\mathfrak{N}_p$ предназначены для **введения** и **удаления** логических операций ($\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$) в правую часть секвенции
- Содержательная трактовка: в правилах исчисления $\mathfrak{N}_p$ отражены основные принципы построения доказательств, основанные на использовании слов "и", "или", "не" и "если .., то .." ("из .. следует ..")

В правилах будут использоваться следующие параметры:

- A, B: произвольные формулы
- Γ: произвольное множество формул

Натуральное исчисление высказываний: правила вывода

Правило введения конъюнкции:

$$R_{\&}^{+}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Если (в предположениях Γ) верно “*A*” и “*B*”, то верно “*A* и *B*”

Правила удаления конъюнкции:

$$R_{\&}^{-1}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad R_{\&}^{-2}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

Если верно “*A* и *B*”, то верно “*A*”
Если верно “*A* и *B*”, то верно “*B*”

Натуральное исчисление высказываний: правила вывода

Правило введения импликации (правило дедукции):

$$R^{+}_{\to}:\ \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Если в предположении "A" верно "B",
то верно утверждение "из A следует B"

Правило удаления импликации
(правило отделения; modus ponens):

$$R^{-}_{\to}:\ \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

Если верно "A" и верно утверждение "из A следует B", то верно "B"

Натуральное исчисление высказываний: правила вывода

Правила введения дизъюнкции:

$$R_{\vee}^{+1}\colon \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad\qquad R_{\vee}^{+2}\colon \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Если верно "A", то верно "A или что угодно"

Если верно "B", то верно "что угодно или B"

Правило удаления дизъюнкции (правило разбора случаев):

$$R_{\vee}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash C,\ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

В этом правиле отражён принцип построения доказательства рассмотрением всех возможных случаев:

- Известно, что верно "A или B"
- В предположении "A" верно "C"
- В предположении "B" верно "C"
- Следовательно, "C" верно

Натуральное исчисление высказываний: правила вывода

Правило введения отрицания
(правило рассуждения от противного):

$$R_{\neg}^{+}\colon\ \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Если в предположении “A” что-то и верно, и неверно,
то “A” неверно (то есть верно “не A”)

Правило удаления отрицания
(правило снятия двойного отрицания):

$$R_{\neg}^{-}\colon\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Если утверждение “неверно A” неверно, то “A” верно

Эти 10 правил ($R_{\&}^{+}$, $R_{\&}^{-1}$, $R_{\&}^{-2}$, $R_{\vee}^{+1}$, $R_{\vee}^{+2}$, $R_{\vee}^{-}$, $R_{\to}^{+}$, $R_{\to}^{-}$, $R_{\neg}^{+}$, $R_{\neg}^{-}$) — все правила исчисления $\mathfrak{N}_p$

Но кажется, каких-то законов всё-таки недостаёт?

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Утверждение(*правило монотонности*). Если в $\mathfrak{N}_p$ доказуема секвенция $\Gamma \vdash A$, то для любого множества формул Δ в $\mathfrak{N}_p$ доказуема и секвенция $\Gamma \cup \Delta \vdash A$

Доказательство.

Рассмотрим произвольное доказательство $\mathcal{D}$ секвенции $\Gamma \vdash A$ в $\mathfrak{N}_p$:

$$\Gamma_1 \vdash B_1,\ \Gamma_2 \vdash B_2,\ ...,\ \Gamma_n \vdash B_n \quad (\Gamma_n = \Gamma;\ B_n = A)$$

Добавим множество Δ к левым частям всех секвенций $\mathcal{D}$:

$$\Gamma_1 \cup \Delta \vdash B_1,\ \Gamma_2 \cup \Delta \vdash B_2,\ ...,\ \Gamma_n \cup \Delta \vdash B_n$$

Заметим, что:

1. Если $\Gamma_i \vdash B_i$ — аксиома, то $\Gamma_i \cup \Delta \vdash B_i$ — тоже аксиома
2. Если $\Gamma_i \vdash B_i$ выводится из $\Gamma_{j_1} \vdash B_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_k} \vdash B_{j_k}$ по правилу R исчисления $\mathfrak{N}_p$ ($j_1 < i, \dots, j_k < i$), то $\Gamma_i \cup \Delta \vdash B_i$ выводится из $\Gamma_{j_1} \cup \Delta \vdash B_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_k} \cup \Delta \vdash B_{j_k}$ по тому же правилу

Значит, последовательность секвенций, получаемая после такого добавления Δ, — доказательство секвенции $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ в $\mathfrak{N}_p$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Утверждение(*закон исключённого третьего*)
Для любой формулы A и любого множества формул Γ в $\mathfrak{N}_p$ доказуема секвенция $\Gamma \vdash A \vee \neg A$

Доказательство. По *правилу монотонности*,
достаточно предложить доказательство секвенции $\vdash A \vee \neg A$

Вот это доказательство:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_{\vee}^{+1}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_{\vee}^{+2}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{-}: & \vdash A \vee \neg A \quad \blacktriangledown
\end{array}
$$

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_\vee^{+1}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_\vee^{+2}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}$$

Попробуем "перевести" этот вывод в $\mathfrak{N}_p$ на естественный язык:

$$\begin{array}{rl}
 & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}$$

Чтобы доказать, что $A \vee \neg A$ верно, докажем, что $\neg(A \vee \neg A)$ неверно

$$\begin{array}{rl}
 & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A)
\end{array}$$

Докажем это от противного: предположим, что $\neg(A \vee \neg A)$ верно; покажем, что тогда $A \vee \neg A$ и верно, и неверно

"$A \vee \neg A$ неверно" — это явно сказано в предположении

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_\vee^{+1}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_\vee^{+2}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}
$$

Попробуем "перевести" этот вывод в $\mathfrak{N}_p$ на естественный язык:

$$
\begin{array}{rl}
 & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_\vee^{+2}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A
\end{array}
$$

"$A \vee \neg A$ верно" — для этого достаточно показать, что A неверно

$$
\begin{array}{rl}
 & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A
\end{array}
$$

Докажем это от противного: предположим, что A верно; покажем, что тогда $A \vee \neg A$ и верно, и неверно

"$A \vee \neg A$ неверно" — это сказано в предположениях

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_{\vee}^{+1}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_{\vee}^{+2}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}$$

Попробуем "перевести" этот вывод в $\mathfrak{N}_p$ на естественный язык:

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_{\vee}^{+1}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A
\end{array}$$

"$A \vee \neg A$ верно": согласно предположениям, верно A;
значит, верно и $A \vee \neg A$

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_\vee^{+1}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_\vee^{+2}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_\neg^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}$$

Попробуем “перевести” этот вывод в $\mathfrak{N}_p$ на естественный язык:

Доказательство.

Предположим, что верно $\neg(A \vee \neg A)$

Дополнительно предположим, что верно A

Так как верно A, то верно и $A \vee \neg A$

Это противоречит предположению $\neg(A \vee \neg A)$, а значит, A неверно

Тогда верно $A \vee \neg A$

Это противоречит предположению $\neg(A \vee \neg A)$,
а значит, $\neg(A \vee \neg A)$ неверно

Значит, верно $A \vee \neg A$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Если записать *правило монотонности* в терминах логических исчислений, то получится такое правило вывода:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash A}$$

Если записать *закон исключённого третьего* в терминах логических исчислений, то получится такая аксиома:

$$\vdash A \vee \neg A$$

Эти правило и аксиома нередко используются “как данность” при построении доказательств в натуральных исчислениях высказываний

Натуральное исчисление высказываний: корректность

Теорема(*о корректности натурального исчисления высказываний*). **Для любой секвенции $\vdash \varphi$, доказуемой в $\mathfrak{N}_p$, формула φ общезначима**

Доказательство.

Рассмотрим произвольное доказательство $\mathcal{D}$ секвенции $\vdash \varphi$ в $\mathfrak{N}_p$:

$$\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \Gamma_2 \vdash \varphi_2, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$$

Согласно устройству правил вывода $\mathfrak{N}_p$,
каждое из множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ конечно

Чтобы обосновать теорему, достаточно показать,
что для каждой секвенции $\sigma = (\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \vdash \psi)$ доказательства $\mathcal{D}$ формула $\varphi_\sigma = \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \psi$ общезначима

Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что:

- Для каждой аксиомы σ в $\mathcal{D}$ формула φ_σ общезначима
- Если секвенция σ в $\mathcal{D}$ получается из секвенций $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ по правилу исчисления $\mathfrak{N}_p$ и формулы $\varphi_{\sigma_1}, \ldots, \varphi_{\sigma_k}$ общезначимы, то и формула φ_σ общезначима

Натуральное исчисление высказываний: корректность

Теорема(*о корректности натурального исчисления высказываний*). Для любой секвенции $\vdash \varphi$, доказуемой в $\mathfrak{N}_p$, формула φ общезначима

Доказательство.

1. Формула, сопоставленная аксиоме, устроена так:

$$\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \psi_i, \text{ где } 1 \leq i \leq k$$

Вспоминаем дискретную математику: эта формула общезначима

2. Рассмотрим только *правило рассуждения от противного* (для остальных правил рассуждения аналогичны)

Согласно этому правилу, требуется показать, что если формулы $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to B$ и $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to \neg B$ общезначимы, то и формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \neg A$ общезначима

Натуральное исчисление высказываний: корректность

Теорема(*о корректности натурального исчисления высказываний*). Для любой секвенции $\vdash \varphi$, доказуемой в $\mathfrak{N}_p$, формула φ общезначима

Доказательство.

2. $\chi_1 = \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to B$, $\chi_2 = \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to \neg B$, $\chi_3 = \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \to \neg A$; $\models \chi_1$ и $\models \chi_2 \Rightarrow \models \chi_3$?

Рассмотрим произвольную интерпретацию $\mathcal{I}$

По общезначимости формул χ_1 и χ_2, верно $\mathcal{I}(\chi_1) = \mathbf{t}$ и $\mathcal{I}(\chi_2) = \mathbf{t}$

По семантике импликации и устройству формул χ_1, χ_2, верно

$$\mathcal{I}(\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi \,\&\, A) = \mathbf{f}$$

Тогда $\mathcal{I}(\neg(\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi \,\&\, A)) = \mathbf{t}$

При этом (*вспоминаем дискретную математику*)

$$\neg(\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \,\&\, A) \sim (\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \to \neg A) = \chi_3$$

Значит, формула χ_3 выполняется в (произвольной) интерпретации $\mathcal{I}$, то есть $\models \chi_3$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Утверждение(*о совмещении выводов*)
Если в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы секвенции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ и из множества $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ выводима секвенция σ, то σ доказуема в $\mathfrak{N}_p$

Доказательство.

Рассмотрим доказательства $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ секвенций $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ и вывод $\mathcal{D}$ секвенции σ из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$

Выпишем подряд секвенции последовательностей $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k, \mathcal{D}$

Получившаяся последовательность — доказательство σ в $\mathfrak{N}_p$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Утверждение(*правило сечения*)

Если в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы секвенции $\Gamma \vdash A_1$, ..., $\Gamma \vdash A_n$ и $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$, то в $\mathfrak{N}_p$ доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

По *правилу дедукции*, из доказуемости $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$ следует доказуемость $\vdash A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_n \to B) \ldots)$

По *правилу монотонности* и *совмещению выводов*, доказуемо $\Gamma \vdash A_1 \to (A_2 \to (\ldots \to (A_n \to B) \ldots))$

По доказуемости секвенций $\Gamma \vdash A_1$, ..., $\Gamma \vdash A_n$ и $\Gamma \vdash A_1 \to (A_2 \to (\ldots \to (A_n \to B) \ldots))$, *правилу отделения* и *совмещению выводов*, доказуемо и

- $\Gamma \vdash A_2 \to (\ldots \to (A_n \to B) \ldots)$
- ...
- $\Gamma \vdash A_n \to B$
- $\Gamma \vdash B$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Утверждение(*правило полного перебора*)
Если в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы секвенции $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ и $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

По *закону исключённого третьего*, доказуема секвенция $\Gamma \vdash A \vee \neg A$

По *правилу разбора случаев*, из этой секвенции и секвенций $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ и $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ выводима секвенция $\Gamma \vdash B$

По *утверждению о совмещении выводов*,
секвенция $\Gamma \vdash B$ доказуема ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Утверждение(*правило приведения к абсурду*)
Если в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$,
то для любой формулы B
в $\mathfrak{N}_p$ доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

По *правилу монотонности*,
доказуемы секвенции $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash A$ и $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash \neg A$

По *правилу рассуждения от противного*,
доказуема секвенция $\Gamma \vdash \neg\neg B$

По *правилу снятия двойного отрицания*,
доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: другие законы

Если записать *правило сечения*, *правило полного перебора* и *правило приведения к абсурду* в терминах логических исчислений, то получатся такие правила вывода:

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \ldots, \Gamma \vdash A_n, \{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,{}^{(1)}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

$$R_a\colon \ \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

Основываясь на *совмещении выводов* и *правиле приведения к абсурду*, будем использовать правило R_a в обоснованиях утверждений о доказуемости секвенций

---

[1] Если строго следовать определениям, то для каждого правила однозначно задана местность, а значит, это не правило вывода. Можете представить себе это “правило” как счётно-бесконечный набор правил вывода, по одному для каждой местности

Натуральное исчисление высказываний: полнота

Лемма(*о выводе связок*). **Для любых формул** A, B **в** $\mathfrak{N}_p$ **доказуемы следующие секвенции:**

$$
\begin{array}{llll}
A, B \vdash A \mathbin{\&} B & \neg A \vdash A \mathbin{\&} B & \neg B \vdash A \mathbin{\&} B & \\
\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A \vdash A \vee B & B \vdash A \vee B & \\
A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \neg A \vdash A \to B & B \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A
\end{array}
$$

Доказательство.

$A, B \vdash A \mathbin{\&} B$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A, B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A, B \vdash B \\
R_{\&}^{+}: & A, B \vdash A \mathbin{\&} B
\end{array}
$$

$A \vdash A \vee B$, $B \vdash A \vee B$ — аналогично

Лемма(*о выводе связок*). Для любых формул A, B в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы следующие секвенции:

$$\begin{array}{llll} A, B \vdash A \,\&\, B & \neg A \vdash A \,\&\, B & \neg B \vdash A \,\&\, B & \\ \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A \vdash A \vee B & B \vdash A \vee B & \\ A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \neg A \vdash A \to B & B \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A \end{array}$$

Доказательство.

$\neg A \vdash \neg(A \,\&\, B)$:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{A}: & \neg A, A \,\&\, B \vdash \neg A \\ \mathfrak{A}: & \neg A, A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B \\ R_{\&}^{-1}: & \neg A, A \,\&\, B \vdash A \\ R_{\neg}^{+}: & \neg A \vdash \neg(A \,\&\, B) \end{array}$$

$\neg B \vdash \neg(A \,\&\, B)$ — аналогично

Натуральное исчисление высказываний: полнота

Лемма(*о выводе связок*). **Для любых формул** A, B **в** $\mathfrak{N}_p$ **доказуемы следующие секвенции:**

$$
\begin{array}{llll}
A, B \vdash A \mathbin{\&} B & \neg A \vdash A \mathbin{\&} B & \neg B \vdash A \mathbin{\&} B & \\
\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A \vdash A \vee B & B \vdash A \vee B & \\
A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \neg A \vdash A \to B & B \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A
\end{array}
$$

Доказательство.

$A \vdash \neg\neg A$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A, \neg A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A, \neg A \vdash \neg A \\
R^{+}_{\neg}: & A, \vdash \neg\neg A
\end{array}
$$

$B \vdash A \to B$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & B, A \vdash B \\
R^{+}_{\to}: & B \vdash A \to B
\end{array}
$$

Натуральное исчисление высказываний: полнота

Лемма(*о выводе связок*). **Для любых формул** A, B **в** $\mathfrak{N}_p$ **доказуемы следующие секвенции:**

$$\begin{array}{llll} A, B \vdash A \,\&\, B & \neg A \vdash A \,\&\, B & \neg B \vdash A \,\&\, B & \\ \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A \vdash A \vee B & B \vdash A \vee B & \\ A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \neg A \vdash A \to B & B \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A \end{array}$$

Доказательство.

$\neg A \vdash A \to B$:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{A}: & \neg A, A \vdash A \\ \mathfrak{A}: & \neg A, A \vdash \neg A \\ R_a: & \neg A, A \vdash B \\ R^{+}_{\to}: & \neg A \vdash A \to B \end{array}$$

Лемма(*о выводе связок*). Для любых формул A, B в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы следующие секвенции:

$$
\begin{array}{llll}
A, B \vdash A \,\&\, B & \neg A \vdash A \,\&\, B & \neg B \vdash A \,\&\, B & \\
\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A \vdash A \vee B & B \vdash A \vee B & \\
A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \neg A \vdash A \to B & B \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A
\end{array}
$$

Доказательство.

$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A, \neg B, A \to B \vdash \neg B \\
\mathfrak{A}: & A, \neg B, A \to B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A, \neg B, A \to B \vdash A \to B \\
R_{\to}^{-}: & A, \neg B, A \to B \vdash B \\
R_{\neg}^{+}: & A, \neg B \vdash \neg(A \to B)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление высказываний: полнота

Лемма(*о выводе связок*). **Для любых формул A, B в $\mathfrak{N}_p$ доказуемы следующие секвенции:**

$$
\begin{array}{llll}
A, B \vdash A \,\&\, B & \neg A \vdash A \,\&\, B & \neg B \vdash A \,\&\, B & \\
\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A \vdash A \vee B & B \vdash A \vee B & \\
A, \neg B \vdash \neg(A \to B) & \neg A \vdash A \to B & B \vdash A \to B & A \vdash \neg\neg A
\end{array}
$$

Доказательство.

$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash B \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B \\
R_a: & \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B, \vdash A \vee B \\
R_\vee^-: & \neg A, \neg B, A \vee B \vdash A \\
\mathfrak{A}: & \neg A, \neg B, A \vee B \vdash \neg A \\
R_\neg^+: & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) \quad \blacktriangledown
\end{array}
$$

Натуральное исчисление высказываний: полнота

$\varphi^{\mathbf{t}} = \varphi$; $\varphi^{\mathbf{f}} = \neg\varphi$;

$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — формула, содержащая **только** переменные $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$

Лемма(*основная*)

Для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ и любой интерпретации $\mathcal{I}$ в $\mathfrak{N}_p$ доказуема секвенция $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)}$

Доказательство. (индукцией по структуре формулы)

База индукции: $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash x_i^{\mathcal{I}(x_i)}$ — это аксиома исчисления

Индуктивный шаг: подробно разберём только случай $\varphi = \psi \,\&\, \chi$ (остальные случаи аналогичны)

По *лемме о выводе связок* и *правилу монотонности*,
доказуемо $\psi^{\mathcal{I}(\psi)}, \chi^{\mathcal{I}(\chi)} \vdash (\psi \,\&\, \chi)^{\mathcal{I}(\chi)}$

По *предположению индукции*,
доказуемо $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \psi^{\mathcal{I}(\psi)}$ и $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \chi^{\mathcal{I}(\chi)}$

По *правилу сечения*, доказуемо и $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\psi)}$ ▼

Натуральное исчисление высказываний: полнота

Теорема(*о полноте натурального исчисления высказываний*). **Для любой общезначимой формулы φ секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в $\mathfrak{N}_p$**

Доказательство.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — все переменные формулы φ

По *основной лемме*, для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}^n$ доказуема секвенция

$$x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash \varphi$$

По *правилу полного перебора*, доказуемы и секвенции

- $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash \varphi$
- $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \vdash \varphi$
- $\dots$
- $x_1^{\alpha_1} \vdash \varphi$
- $\vdash \varphi$ ▼

Натуральное исчисление предикатов

Попробуем доказать такое утверждение:

Утверждение. Если все целые чи́сла обладают свойством P,
то существует целое число, обладающее свойством P

Доказательство. Рассмотрим произвольное целое число x

Так как все чи́сла обладают свойством P,
то и x обладает свойством P

Так как рассматриваемое целое число x обладает свойством P,
то существует целое число, обладающее свойством P ▼

В исчислении $\mathfrak{N}_p$ нет правил, позволяющих
"рассмотреть произвольный предмет x",
и в языке логики высказываний нет средств записи фраз
"для любого предмета" и "существует предмет"

Для записи таких фраз подходит язык *логики предикатов*

Натуральное исчисление предикатов

Попробуем модифицировать и расширить исчисление $\mathfrak{N}_p$ (до исчисления $\mathfrak{N}$) так, чтобы оно подходило для "полноценного" доказательства общезначимости формул логики предикатов

Словом "формула" теперь будем обозначать формулы логики предикатов

Понятие *секвенции* оставим без изменений: это запись $\Gamma \vdash A$, где A — формула и Γ — множество формул

Объявим секвенции формулами исчисления $\mathfrak{N}$

Множество аксиом оставим без изменений: это все секвенции, порождаемые схемой $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$

Натуральное исчисление предикатов: правила вывода

Включим в $\mathfrak{N}$ все правила вывода, сформулированные для исчисления $\mathfrak{N}_p$

Единственное существенное изменение: добавим в $\mathfrak{N}$ правила введения и удаления кванторов

В этих правилах будут использоваться следующие параметры:

- A, B — формулы
- Γ — множество формул
- $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ — предметные переменные
- t — терм

Для каждого правила также будут описаны **ограничения**, связывающие между собой допустимые значения разных параметров

Натуральное исчисление предикатов: правила вывода

Правило удаления всеобщности
(правило перехода к частному):

$$R_\forall^-:\ \frac{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}$$

Ограничение: подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ *правильна* для A

Если A верно для любого предмета,
то, в частности, A верно и для предмета, отвечающего терму t

Напоминание о правильности подстановок:

- Подстановка правильна $\Leftrightarrow$ все переменные подставляемых термов t оказываются свободными в A
- О том, чем "плохо" применение неправильных подстановок, говорилось в *лекции 5* ("существует тот, кто сам себе дед"); по тем же причинам запрещено выбирать неправильные подстановки в этом правиле

Натуральное исчисление предикатов: правила вывода

Правило введения существования:

$$R_{\exists}^{+}\colon \frac{\Gamma \vdash A\{\mathtt{x}/t\}}{\Gamma \vdash \exists \mathtt{x}\ A}$$

Ограничение: подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ *правильна* для A

Если A верно для предмета, отвечающего терму t,
то существует предмет, для которого верно A

Необходимость в правильности подстановки
вытекает из тех же соображений, что и для правила $R_{\forall}^{-}$

Натуральное исчисление предикатов: правила вывода

Правило введения всеобщности (правило обобщения):

$$R_{\forall}^{+}:\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}$$

Ограничение: x не является свободной переменной формул из Γ

В этом правиле отражён принцип построения доказательств, основанный на рассмотрении **произвольного** предмета:

- Рассмотрим произвольный предмет x
- Известно, что *для этого* x верно A
- Следовательно, A верно для любого предмета x

"Произвольность" предмета x отражена в **ограничении**:

- Если в Γ содержится формула φ со свободной переменной x, то, согласно содержательной трактовке секвенции $\Gamma \vdash A$, среди текущих используемых предположений есть такое: "предмет x обладает свойством φ", а значит, x не произволен
- Иначе нет ни одного текущего предположения, "конкретизирующего" свойства предмета x

Натуральное исчисление предикатов: правила вывода

Правило удаления существования

$$R_{\exists}^{-}:\ \frac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A, \Gamma \cup \{A\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничения:

- Подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ правильна для A
- y не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\ A,\ B\}$

Это правило вывода — самое сложное для понимания
во всём исчислении, но при этом повсеместно использующееся
в "естественных" доказательствах:

- Известно, что существует предмет, для которого верно A
- Обозначим этот существующий предмет символом y
- Получив возможность указывать на предмет y,
покажем, что верно утверждение B,
не зависящее от того, какое именно имя y было выбрано
- Из этого сделаем вывод, что B действительно верно

Натуральное исчисление предикатов: правила вывода

$$R_\exists^-: \frac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A, \Gamma \cup \{A\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничения:

- Подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ правильна для A
- y не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\ A,\ B\}$

Эти ограничения вытекают из следующих соображений:

- Всё, что известно про y — это то, что для него верно A, а в остальном y *произволен*
  - поэтому переменная y не свободна в $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\ A\}$
- Если в B содержится свободная переменная y, то от предположения "для этого y верно A" избавиться нельзя, а если не содержится, то можно
  - поэтому переменная y не свободна в B

Натуральное исчисление предикатов: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\,(\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\,\mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

1. Посмотрим внимательно во второе утверждение:
$$\mathfrak{A}\colon\ \varphi_1, \varphi_2 \vdash \exists \mathtt{x}\,\mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$
2. Обозначим этого прилежного студента переменной “**Вася**”,
и посмотрим внимательно на факт его прилежности:
$$\mathfrak{A}\colon\ \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася})$$

Натуральное исчисление предикатов: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

3. Раз все прилежные студенты сдадут этот курс, то и условленный **Вася** сдаст, если он прилежен:
$$R_{\forall}^{-}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \to \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R_{\to}^{-}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Натуральное исчисление предикатов: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

Правильный вывод:

5. Раз условленный **Вася** сдаст этот курс,
то хотя бы один студент сдаст этот курс:
$$R^{+}_{\exists}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Pass}(\mathtt{x})$$

6. Итог: хотя бы один студент сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\exists}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Pass}(\mathtt{x})$$

Натуральное исчисление предикатов: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\, (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\, \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Не**правильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\to}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
5. Итог: студент с именем "**Вася**" сдаст этот курс:
$$\cancel{R^{-}_{\exists}}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Содержательно: на самом деле **Васи** не существует — это условность, про которую в исходных данных ничего не сказано, и он никак не связан с реальными Васями

Строго: правило $R^{-}_{\exists}$ применено ошибочно: в правой части секвенции 4 содержится свободная переменная "**Вася**"

Натуральное исчисление предикатов: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$

- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Не**правильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\to}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

5. Так как “**Вася**” — переменная,
на его место можно поставить любого студента:
$$\cancel{R^{+}_{\forall}}\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \forall\textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

6. Значит, кто угодно сдаст этот курс:
$$R^{-}_{\exists}\colon \varphi_1, \varphi_2 \vdash \forall\textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Натуральное исчисление предикатов: примеры

Дано:

- Все прилежные студенты сдадут этот курс
$$\varphi_1 = \forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Diligent}(\mathtt{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$
- Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент
$$\varphi_2 = \exists \mathtt{x}\ \mathrm{Diligent}(\mathtt{x})$$

***Не**правильный вывод:* ...

4. Из этого и прилежности **Васи** следует, что он сдаст этот курс:
$$R^-_\to\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$
5. Так как "**Вася**" — переменная,
на его место можно поставить любого студента:
$$\cancel{R}^+_\forall\colon \varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \vdash \forall\textbf{Вася}\ \mathrm{Pass}(\textbf{Вася})$$

Содержательно: Вася — произвольный **прилежный** студент, а неприлежные не справятся с ролью **Васи**

Строго: правило $R^+_\forall$ применено ошибочно: в левой части секвенции 4 содержится свободная переменная **Вася**

Натуральное исчисление предикатов: корректность

Теорема(*о корректности натурального исчисления предикатов*). Для любой секвенции $\vdash \varphi$, доказуемой в $\mathfrak{N}$, формула φ общезначима

Общая схема доказательства остаётся с точности такой же, как и для *теоремы о корректности натурального исчисления высказываний*

Для правил, содержащихся в $\mathfrak{N}$, доказательство переносится почти дословно (*с поправкой на наличие свободных переменных в формулах*)

А для четырёх новых правил можете попробовать предложить обоснование самостоятельно

Натуральное исчисление предикатов: полнота

А правда ли, что описанных правил достаточно для доказательства общезначимости **любой** формулы логики предикатов?

В *теореме о полноте натурального исчисления высказываний* существенно использовался тот факт, что для любой формулы можно *доказанно* построить **конечную** таблицу значений, перебрав **конечное** множество всех интерпретаций

Для формул логики предикатов
такой "трюк" применить невозможно

Обоснование полноты исчислений предикатов — непростая задача, поэтому существенная часть обоснования в лекциях будет опущена

Натуральное исчисление предикатов: полнота

Попробуем обосновать полноту исчисления $\mathfrak{N}$ так:

- Рассмотрим более “простое” полное исчисление предикатов ($\mathfrak{H}$)
- Покажем, что по доказательству общезначимости любой формулы в $\mathfrak{H}$ можно построить доказательство общезначимости той же формулы в $\mathfrak{N}$

Из этих двух фактов будет непосредственно следовать полнота исчисления $\mathfrak{N}$:

- Для любой общезначимой формулы существует доказательство общезначимости в $\mathfrak{H}$, а значит, существует и доказательство общезначимости в $\mathfrak{N}$

Исчисление предикатов гильбертовского типа

“Простоту” исчисления $\mathfrak{H}$ устроим так:

- Формулами исчисления объявим формулы логики предикатов
- Включим в исчисление как можно меньше правил
  как можно более простого вида
- Включим в исчисление как можно меньше аксиом
  как можно более простого вида, но так,
  чтобы из-за слишком малого числа аксиом
  не возросло общее число правил

Исчисления такого вида принято называть
исчислениями гильбертовского типа

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Включим в исчисление $\mathfrak{H}$ два правила:

1. *Правило отделения* (modus ponens):
$$R_{mp}\colon\ \frac{A, A \to B}{B}$$

2. *Правило обобщения*:
$$R_g\colon\ \frac{A}{\forall \mathrm{x}\ A}$$

Это "упрощённые" варианты одноимённых правил исчисления $\mathfrak{N}$, соответствующие секвенциям с пустой левой частью (не содержащим ни одного предположения)

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами (A, B, C — формулы;
$\mathtt{x}$ — переменная; t — терм; подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для A):

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $A \,\&\, B \to A$
4. $A \,\&\, B \to B$
5. $A \to (B \to A \,\&\, B)$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $\neg A \to (A \to B)$
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A$
11. $A \vee \neg A$
12. $\forall \mathtt{x}\; A \to A\{\mathtt{x}/t\}$
13. $A\{\mathtt{x}/t\} \to \exists \mathtt{x}\; A$

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Пояснение схем аксиом:

$$A \to (B \to A)$$

Если A верно, то оно следует из чего угодно

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

Если в предположении о верности A из B следует C, и если, кроме того, из A следует B, то из A следует C

$$A \mathbin{\&} B \to A \qquad\qquad A \mathbin{\&} B \to B$$

Из $A \mathbin{\&} B$ следует и A, и B

$$A \to (B \to A \mathbin{\&} B)$$

Если верно A и B, то верно $A \mathbin{\&} B$

$$A \to A \vee B \qquad\qquad B \to A \vee B$$

Если верно A или верно B, то верно $A \vee B$

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

Если из A следует C и из B следует C, то из $A \vee B$ также следует C

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Пояснение схем аксиом:

$$\neg A \to (A \to B)$$

Если A неверно, то из него следует что угодно

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A$$

Если из A следует и B, и $\neg B$, то A неверно

$$A \vee \neg A$$

Справедлив закон исключённого третьего

$$\forall \mathtt{x}\ A \to A\{\mathtt{x}/t\}$$

Если A верно для всех предметов $\mathtt{x}$, то A верно и для предмета, отвечающего терму t

$$A\{\mathtt{x}/t\} \to \exists \mathtt{x}\ A$$

Если A верно для предмета, отвечающего терму t, то существует предмет, для которого верно A

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Пример, показывающий нетривиальность доказательств общезначимости формул в $\mathfrak{H}$

Докажем в $\mathfrak{H}$ общезначимость формулы $A \to A$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}_2: & (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\mathfrak{A}_1: & A \to ((A \to A) \to A) \\
R_{mp}: & (A \to (A \to A)) \to (A \to A) \\
\mathfrak{A}_1: & A \to (A \to A) \\
R_{mp}: & A \to A
\end{array}
$$

Как до такого додуматься?

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Придумывать доказательства в $\mathfrak{H}$ намного сложнее, чем в $\mathfrak{N}$,
но из-за простоты правил и аксиом
обосновать полноту исчисления $\mathfrak{H}$ намного проще

Теорема(*Гёделя о полноте*)
Формула логики предикатов доказуема в исчислении $\mathfrak{H}$ в том и только том случае, если она общезначима

Доказательство. Самостоятельно
(и это самая трудная и ценная самостоятельная задача в курсе)

Докажем полноту исчисления $\mathfrak{N}$, отталкиваясь от этой теоремы

Натуральное исчисление предикатов: полнота

Лемма(о сведе́нии гильбертовского исчисления к натуральному). **Если формула φ доказуема в $\mathfrak{H}$, то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в $\mathfrak{N}$**

Доказательство.

По *утверждению о совмещении выводов*, достаточно обосновать следующее:

1. Для каждой аксиомы ψ исчисления $\mathfrak{H}$ секвенция $\vdash \psi$ доказуема в $\mathfrak{N}$
2. Если формула χ выводима из ψ_1, ψ_2 по правилу R_{mp}, то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ в $\mathfrak{N}$
3. Если формула χ выводима из ψ по правилу R_g, то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\vdash \psi$ в $\mathfrak{N}$

Натуральное исчисление предикатов: полнота

Доказательство (леммы о сведéнии).

1. Подробно рассмотрим только аксиому

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны)

Доказательство соответствующей секвенции в $\mathfrak{N}$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash A \vee B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash A \to C \\
R^-_\to: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash C \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \to C \\
R^-_\to: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash C \\
R^-_\vee: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C \\
R^+_\to: & A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C \\
R^+_\to: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C) \\
R^+_\to: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))
\end{array}
$$

Натуральное исчисление предикатов: полнота

Доказательство (леммы о сведéнии).

2. Пусть формула χ выводима из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \to \chi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$R_{\to}^{-}: \quad \begin{array}{l} \vdash \psi_1 \\ \vdash \psi_1 \to \chi \\ \vdash \chi \end{array}$$

3. Пусть формула χ выводима из ψ по правилу R_g

Тогда $\chi = \forall \mathtt{x}\ \psi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\vdash \psi$ устроен очень просто:

$$R_{\forall}^{+}: \quad \begin{array}{l} \vdash \psi \\ \vdash \forall \mathtt{x}\ \psi \end{array} \quad \blacktriangledown$$

Натуральное исчисление предикатов: полнота

Теорема(*о полноте натурального исчисления предикатов*)
Для любой общезначимой формулы φ логики предикатов секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в $\mathfrak{N}$

Доказательство.

По *теореме Гёделя о полноте*,
(общезначимая) формула φ доказуема в $\mathfrak{H}$

Из этого и *лемме о свéдении исчисления $\mathfrak{H}$ к исчислению $\mathfrak{N}$* следует, что секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в $\mathfrak{N}$ ▼

Следствие(*проверка логического следования в натуральном исчислении*)
Для любого множества предложений Γ и любого предложения φ верно следующее: секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда верно соотношение $\Gamma \models \varphi$

Натуральное исчисление предикатов: полнота

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о равносильной замене* и *законы булевой алгебры*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$

$\Rightarrow$ (*полнота исчисления*)

Секвенция $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности* и *правило отделения*)

Секвенция $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности*)

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Доказательство в обратную сторону аналогично ▼