Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 17

Двухголовочные автоматы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

(Обычный) конечный автомат-распознаватель — это устройство с конечным числом состояний для чтения слов, записанных на ленте

Такой автомат содержит одну читающую головку, обозревающую одн символ и способную сдвигаться по ленте вправо:
$[q_1] \mapsto abba \quad \to \quad [q_2]a \mapsto bba \quad \to \quad [q_3]ab \mapsto ba \quad \to \quad [q_4]abb \mapsto a \quad \to \quad [q_5]abba \mapsto \quad \to$ принять/отклонить

В двухголовочном автомате добавляется еща одна читающая головка, и две головки перемещаются независимо согласно программе автомата
$[q_1]{\color{blue}\mapsto}{\color{green}\mapsto}abba \quad \to \quad [q_2]{\color{blue}\mapsto}a{\color{green}\mapsto}bba \quad \to \quad [q_3]{\color{blue}\mapsto}ab{\color{green}\mapsto}ba \quad \to$
$[q_4]a{\color{blue}\mapsto}b{\color{green}\mapsto}ba \quad \to \quad [q_5]a{\color{blue}\mapsto}bb{\color{green}\mapsto}a \quad \to \quad [q_6]a{\color{blue}\mapsto}bba{\color{green}\mapsto} \quad \to$
$[q_7]ab{\color{blue}\mapsto}ba{\color{green}\mapsto} \quad \to$ принять/отклонить

Двухголовочный детерминированный конечный автомат над алфавитом Σ — это система $\mathcal{D} = (Q_1, Q_2, q_f, q_0, T)$, где:

- Q_1, Q_2 — конечные множества состояний первой головки и второй головки соответственно
- $q_f \notin Q_1 \cup Q_2$ — заключительное состояние
- $q_0 \in Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_f\}$ — начальное состояние
- $T : (Q_1 \cup Q_2) \times \Sigma \to Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_f\}$ — функция переходов
  - Соотношение $T(q, a) = p$ принято записывать так: $q \xrightarrow{a} p$

Содержательно,

- Q_1 — состояния, при выполнении перехода из которых обозревает символ и двигается первая головка
- Q_2 — состояния, при выполнении перехода из которых обозревает символ и двигается вторая головка
- $q \xrightarrow{a} p$ означает, что головка, отвечающая состоянию q, прочитывает очередно символ a (обозревает этот символ и сдвигается на один символ вправо), и автомат переходит в состояние p

Рассмотрим двухголовочный автомат $\mathcal{D} = (Q_1, Q_2, q_f, q_0, T)$ над алфавитом Σ

Состояние вычисления автомата $\mathcal{D}$ — это тройка $(q, w_1, w_2) \in (S_1 \cup S_2 \cup \{s_f\}) \times \Sigma^* \times \Sigma^*$

Вычисление автомата $\mathcal{D}$ на слове w — это последовательность состояний вычисления

$$(q_1, v_1, w_1), (q_2, v_2, w_2), (q_3, v_3, w_3), \ldots,$$

устроенная следующим образом:

- $q_1 = q_0$, $v_1 = w_1 = w$
- Если $q_i \in Q_1$ и $v_i \neq \lambda$, то $v_i = av_{i+1}$, $w_{i+1} = w_i$ и $q_i \xrightarrow{a} q_{i+1}$
- Если $q_i \in Q_2$ и $w_i \neq \lambda$, то $v_{i+1} = v_i$, $w_i = aw_{i+1}$ и $q_i \xrightarrow{a} q_{i+1}$
- Если $q_i \in Q_1$ и $v_i = \lambda$, или $q_i \in Q_2$ и $w_i = \lambda$, или $q_i = q_f$, то (q_i, v_i, w_i) — последний элемент последовательности

Слово w принимается автоматом $\mathcal{D}$, если вычисление $\mathcal{D}$ на w конечно и оканчивается состоянием вычисления вида $(q_f, \_, \_)$

Автомат $\mathcal{D}$ пуст, если им не принимается ни одно слово

Двоичный двухголовочный автомат $\mathcal{D}$ — это автомат над алфавитом $\{0, 1\}$

Проблема пустоты для двоичных двухголовочных автоматов формулируется так: для произвольного заданного двоичного двухголовочного автомата проверить, является ли этот автомат пустым

Теорема (Розенберг, 1963). Проблема пустоты двоичных двухголовочных автоматов неразрешима