Лекция: Последовательности. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные уравнения. Общие решения линейных рекуррентных однородных и неоднородных уравнений.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по "Избранным вопросам дискретной математики".
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Последовательности

Часто при решении дискретных задач возникают **последовательности (функции натуральной переменной)**.

Это могут быть последовательности чисел или элементов какого-то другого множества (поля, кольца и т.д.).

Последовательности могут быть как конечными, так и, вообще говоря, бесконечными.

Например, последовательность биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ при фиксированном значении числа n – это пример конечной последовательности целых неотрицательных чисел.

Пример бесконечной последовательности: $M(n)$ – сложность n-разрядного умножителя, в курсе дискретной математики было доказано, что при построении умножителя по методу Карацубы получаем, что $M(2n) \leq 3M(n) + Cn$, где C некоторая константа.

Определение последовательности

Вспомним определение последовательности.

Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие какой-то элемент x_n из некоторого множества A, то говорят, что задана **последовательность** элементов множества A

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Чаще всего в качестве множества A мы будем рассматривать множество чисел (натуральных $\mathbb{N}$, целых $\mathbb{Z}$, действительных $\mathbb{R}$). Как мы увидим дальше, иногда бывает удобно считать, что все элементы принадлежат множеству комплексных чисел $\mathbb{C}$. Напомним, что **комплексное число** имеет вид $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а i таково, что $i^2 = -1$, и называется **мнимой единицей**. Фактически, мы будем применять тот факт, что любой многочлен степени n имеет **ровно** n корней над полем $\mathbb{C}$.

Явное описание последовательностей

Часто при решении содержательных задач возникает такая ситуация: мы знаем, как определяется элемент последовательности x_n при каждом значении $n \in \mathbb{N}$.

Такое описание последовательности называется **явным**.

Например, при подсчете числа сочетаний из n по k мы нашли явное значение биномиальных коэффициентов C_n^k.
А именно, $C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$.

Рекуррентное описание последовательностей

Однако для подсчета значений биномиальных коэффициентов явное описание оказалось не очень удобным. И мы доказали **рекуррентное соотношение** между биномиальными коэффициентами $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Если задать начальные условия $C_n^0 = 1$, $C_n^k = 0$ при $n < k$, то рекуррентным уравнением $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ последовательность биномиальных коэффициентов определяется однозначно.

Поэтому один из вопросов, касающийся последовательностей, следующий: как по явному описанию последовательности найти ее рекуррентное задание?

Последовательность числел Фибоначчи

Но часто ситуация бывает обратной: мы получаем рекуррентное описание последовательности, а нужно найти ее явное описание.

Наверное, самый известный пример такой задачи – последовательность **чисел Фибоначчи** f_n.

Пример 1. Найти явное описание последовательности натуральных чисел f_n, если $f_0 = f_1 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ при $n \geq 0$.

Сложность построения полинома Жегалкина

Рассмотрим другой пример: построение полинома Жегалкина функции алгебры логики быстрым методом.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(y, x_1, \dots, x_n) \in P_2$.
Разложим ее по первой переменной и выполним следующие преобразования:

$$f(y, x_1, \dots, x_n) = \bar{y} f(0, x_1, \dots, x_n) \oplus y f(1, x_1, \dots, x_n) =$$

$$= y\,(f(0, x_1, \dots, x_n) \oplus f(1, x_1, \dots, x_n)) \oplus f(0, x_1, \dots, x_n).$$

Пусть для функций $f(0, x_1, \dots, x_n)$ и $f(1, x_1, \dots, x_n)$ полиномы Жегалкина уже построены.
Тогда для того, чтобы получить полином Жегалкина функции $f(y, x_1, \dots, x_n)$, надо сложить (по mod 2) коэффициенты при каждом из 2^n мономов в этих полиномах.

Сложность построения полинома Жегалкина

Пример 2 (продолжение). Пусть $L(n)$ – число операций сложения по mod 2, которые надо выполнить для построения этим методом полинома Жегалкина функции алгебры логики, зависящей от n переменных.

Тогда для последовательности натуральных чисел $L(n)$ верно рекуррентное соотношение:

$$L(n+1) = 2 \cdot L(n) + 2^n.$$

Решение рекуррентных соотношений

Можно ли рекуррентные соотношения **решать**?

Не угадывать решения и потом пытаться доказывать, что они подходят, а именно решать?

Мы увидим, что в некоторых случаях это возможно.

Линейные однородные рекуррентные уравнения

Введем некоторые определения.

Линейным однородным рекуррентным уравнением (ЛОРУ) (порядка k) называется соотношение вида

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + p_1 x_{n+1} + p_0 x_n = 0,$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ – некоторые числа.

Если последовательность $\{x_n\}$ задается некоторым ЛОРУ, то такая последовательность называется **возвратной**.

Например, последовательность чисел Фибоначчи f_n является возвратной, т.к. она задается ЛОРУ порядка 2:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0.$$

Однозначное определение последовательностей

Несложно заметить, что если последовательность задается ЛОРУ порядка k, то она однозначно определяется своими первыми k элементами. Эти первые k элементов называются **начальными значениями** последовательности.

Например, последовательность чисел Фибоначчи f_n однозначно определяется двумя первыми элементами $f_0 = f_1 = 1$. А далее,

$$f_2 = f_1 + f_0 = 2; \quad f_3 = f_2 + f_1 = 3; \quad f_4 = f_3 + f_2 = 5; \ldots$$

Частное решение рекуррентного соотношения

Что является **решением** рекуррентного соотношения?

Частным решением рекуррентного соотношения называется такая последовательность $\{a_n\}$, что при подстановке в это уравнение для каждого n соответствующих элементов этой последовательности получается верное равенство.

Лемма о частных решениях ЛОРУ

Как много решений может быть у ЛОРУ?

Лемма 1. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – частные решения ЛОРУ $x_{n+k}+\sum\limits_{j=1}^{k}p_{k-j}x_{n+k-j}=0$, и C_1, C_2 – произвольные (комплексные) числа, то последовательность $\{C_1a_n+C_2b_n\}$, также является частным решением этого ЛОРУ.*

Доказательство. Подставим элементы рассматриваемой последовательности в ЛОРУ и выполним преобразования:

$$(C_1a_{n+k}+C_2b_{n+k})+\sum_{j=1}^{k}p_{k-j}(C_1a_{n+k-j}+C_2b_{n+k-j})=$$

$$C_1\left(a_{n+k}+\sum_{j=1}^{k}p_{k-j}a_{n+k-j}\right)+C_1\left(b_{n+k}+\sum_{j=1}^{k}p_{k-j}b_{n+k-j}\right)=0.$$

Общее решение рекуррентного соотношения

Множество всех частных решений называется **общим решением** рекуррентного соотношения.

Из леммы 1 следует, что общее решение ЛОРУ является линейным пространством относительно операции умножения на комплексное число.

Характеристический многочлен ЛОРУ

Решать линейные рекуррентные уравнения можно при помощи их **характеристических многочленов**.

Характеристическим многочленом ЛОРУ

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + p_1 x_{n-1} + p_0 x_n = 0$$

называется многочлен **комплексной** переменной

$$P(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \cdots + p_1 x + p_0.$$

Степень характеристического многочлена равна порядку ЛОРУ.

Характеристический многочлен последовательности чисел Фибоначчи

Например, характеристическим многочленом ЛОРУ, задающего последовательность чисел Фибоначчи

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,$$

является многочлен комплексной переменной

$$P(x) = x^2 - x - 1.$$

Лемма о корне характеристического многочлена

Лемма 2. *Пусть* λ *– корень характеристического многочлена* $P(x)$ *ЛОРУ* $x_{n+k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$. *Тогда последовательность* $\{\lambda^n\}$ *является частным решением этого ЛОРУ.*

Доказательство. Подставим элементы рассматриваемой последовательности в ЛОРУ и выполним преобразования:

$$\lambda^{n+k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} \lambda^{n+k-j} = \lambda^{n} \left(\lambda^{k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} \lambda^{k-j} \right) =$$

$$= \lambda^n P(\lambda) = 0.$$

$\square$

Общее решение ЛОРУ с простыми корнями

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – **различные** *(простые) корни характеристического многочлена* $P(x)$ *ЛОРУ* $x_{n+k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$. *Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$\{C_1\lambda_1^n + \dots + C_k\lambda_k^n\},$$

где $C_1, \dots, C_k$ *– произвольные (комплексные) числа.*

Доказательство. По лемме 2 каждая из последовательностей $\{\lambda_j^n\}$ является частным решением этого ЛОРУ. По лемме 1 указанная линейная комбинация частных решений является также решением этого ЛОРУ. Значит, осталось доказать, что других решений нет. Т.е., что произвольное частное решение этого ЛОРУ представимо в таком виде.

Общее решение ЛОРУ с простыми корнями

Доказательство (продолжение). Пусть последовательсть $\{a_n\}$ является частным решением этого ЛОРУ.

Покажем, что можно найти такие коэффициенты $C_1, \dots, C_k$, что $a_n = C_1\lambda_1^n + \dots + C_k\lambda_k^n$.

Для этого составим систему линейных уравнений относительно коэффициентов $C_1, \dots, C_k$:

$$\begin{cases} C_1 + \dots + C_k = a_0 \\ \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k = a_1 \\ \lambda_1^2 C_1 + \dots + \lambda_k^2 C_k = a_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \lambda_1^{k-1} C_1 + \dots + \lambda_k^{k-1} C_k = a_{k-1} \end{cases}$$

Общее решение ЛОРУ с простыми корнями

Доказательство (продолжение). Как известно, определитель матрицы этой системы – это определитель Вандермонда, который равен $\prod\limits_{s<t}(\lambda_s - \lambda_t)$. Несложно заметить, что он не равен нулю, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ попарно различны.

Значит, при любых значениях $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ эта система имеет единственное решение.
Т.е. последовательность $\{a_n\}$ выражается линейной комбинацией последовательностей $\{\lambda_j^n\}$.

$\square$

Решение задачи о числах Фибоначчи

Пример 1. Найдем явное выражение чисел Фибоначчи f_n, где $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0, \;\; f_0 = f_1 = 1$.

Решение. Найдем корни характеристического многочлена этого ЛОРУ:

$$P(x) = x^2 - x - 1 = 0.$$

Получаем

$$D = 1 + 4 = 5; \;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

По теореме 3 выписываем общее решение ЛОРУ:

$$f_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные числа.

Решение задачи о числах Фибоначчи

Решение (продолжение). Подставляем начальные значения $f_0 = f_1 = 1$ и записываем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ и $C_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Откуда находим явное выражение чисел Фибоначчи:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Обратим внимание, что при каждом значении n число f_n является натуральным.

Лемма о кратном корне характеристического многочлена

Если характеристический многочлен ЛОРУ имеет кратные корни, то существуют другие частные решения такого ЛОРУ.

Лемма 4. *Пусть λ – корень кратности r, $1 \leq r \leq k$, характеристического многочлена $P(x)$ ЛОРУ $x_{n+k} + \sum\limits_{j=1}^{k} p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$. Тогда последовательность $\{n^m \lambda^n\}$, где $0 \leq m < r$, является частным решением этого ЛОРУ.*

Доказательство. Положим $p_k = 1$ и подставим элементы рассматриваемой последовательности в ЛОРУ:

$$(n+k)^m \lambda^{n+k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j}(n+k-j)^m \lambda^{n+k-j} =$$

$$= \lambda^n \left(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(n+k-j)^m \lambda^{k-j} \right).$$

Лемма о кратном корне характеристического многочлена

Доказательство (продолжение). Теперь разложим выражения $(n+k-j)^m$, $0 \le j \le k$, по биному Ньютона и выполним преобразования:

$$\lambda^n \left(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j} \sum_{i=0}^{m} C_m^i n^{m-i} (k-j)^i \lambda^{k-j} \right) =$$

$$\lambda^n \left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i n^{m-i} \sum_{j=0}^{k} p_{k-j} (k-j)^i \lambda^{k-j} \right) = \lambda^n n^m \left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i n^{-i} P_i(\lambda) \right),$$

где $P_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} p_{k-j}(k-j)^i x^{k-j}$. Заметим, что $P_0(x) = P(x)$ – характеристический многочлен исходного ЛОРУ.

Лемма о кратном корне характеристического многочлена

Доказательство (продолжение). По условию леммы 4 λ – корень кратности r многочлена $P_0(x)$. Поэтому многочлен $P_0(x)$ можно записать в виде:

$$P_0(x) = (x - \lambda)^r Q_0(x), \qquad (1)$$

где $Q_0(x)$ – некоторый многочлен. Несложно заметить, что при $1 \leq i < r$ верно

$$P_i(x) = x \cdot (P_{i-1}(x))'. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) заключаем, что

$$P_i(x) = (x - \lambda)^{r-i} Q_i(x),$$

где $Q_i(x)$ – некоторый многочлен, $0 \leq i < r$. Откуда получаем, что $P_i(\lambda) = 0$ при $0 \leq i < r$. Значит, последовательность $n^m \lambda^n$ является частным решением исходного ЛОРУ. $\square$

Общее решение произвольных ЛОРУ

Теперь можно сформулировать и доказать теорему об общем решении произвольных ЛОРУ.

Теорема 5. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – все различные (комплексные) корни характеристического многочлена $P(x)$ ЛОРУ $x_{n+k} + \sum\limits_{j=1}^{k} p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$, причем кратность корня λ_j равна r_j, и $r_1 + \cdots + r_s = k$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$\left\{ \sum_{j=1}^{s} (C_{j,0} + C_{j,1} n + \cdots + C_{j,r_j-1} n^{r_j-1}) \cdot \lambda_j^n \right\},$$

$C_{j,0}, C_{j,1}, \ldots, C_{j,r_j-1}$ – произвольные (комплексные) числа, $j = 1, \ldots, s$.

Доказательство. По леммам 4 и 1 указанные последовательности являются решением исходного ЛОРУ.

Общее решение произвольных ЛОРУ

Доказательство (продолжение). Поэтому осталось доказать, что каждое частное решение исходного ЛОРУ имеет такой вид. Это доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 3. Оставим его для самостоятельного разбора.

□

Пример об арифметической прогрессии

Пример 3. Как известно, арифметическая прогрессия a_n определяется свойством $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$.
А значит, она задается ЛОРУ порядка 2:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0.$$

Найдем общее решение этого ЛОРУ. Его характеристический многочлен $P(x)$ имеет вид:

$$P(x) = x^2 - 2x + 1.$$

У него один корень $x = 1$ кратности 2.

Следовательно, по теореме 4 общее решение этого ЛОРУ

$$(C_0 + C_1 n) \cdot 1^n = C_0 + C_1 n,$$

где C_0, C_1 – произвольные (комплексные) числа. А это общий вид элементов арифметической прогрессии с первым членом C_0 разностью C_1.

Линейные неоднородные рекуррентные уравнения

А что делать, если в правой части рекуррентного соотношения не ноль?

Линейным неоднородным рекуррентным уравнением (ЛНРУ) (порядка k) называется соотношение вида

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1 x_{n-1} + p_0 x_n = g(n),$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ – некоторые числа, а $g(n)$ – некоторая числовая функция, не равная тождественно нулю.

Например, последовательность числа операций сложения при построении полинома Жегалкина функции алгебры логики от n переменных $L(n)$ задается ЛНРУ порядка 1:

$$L(n+1) - 2L(n) = 2^n.$$

Общее решение ЛНРУ

Если в ЛНРУ правую часть заменить на 0, мы получим **соответствующее ему** ЛОРУ.

Оказывается, существует связь между ЛНРУ и соответствующим ему ЛОРУ.

Теорема 6. *Общим решением ЛНРУ является сумма какого-то его частного решения* $\{b_n\}$ *и общего решения соответствующего ему ЛОРУ*.

Доказательство. Понятно, что указанная сумма является решением исходного ЛНРУ. Рассмотрим теперь произвольное частное решение $\{a_n\}$ исходного ЛНРУ. Тогда последовательность $\{a_n - b_n\}$ является частным решением соответствующего ЛОРУ. А значит, входит в общее решение соответствующего ЛОРУ. □

Частное решение ЛНРУ

Как находить частное решение ЛНРУ?

В общем случае, нельзя предложить универсальный метод.

Но если правая часть имеет вид λ^n, умноженное на многочлен переменной n, частное решение можно искать в определенным образом.

Частное решение некоторых ЛНРУ

Теорема 7. *Для ЛНРУ*

$$x_{n+k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} x_{n+k-j} = (d_0 + d_1 n + \dots + d_m n^m) \cdot \lambda^n,$$

в котором $p_{k-1}, \dots, p_1, p_0, d_0, d_1, \dots, d_m, \lambda$ – некоторые числа, $\lambda \neq 0$, $k \geq 1$, существует частное решение вида
1) $\{(c_0 + c_1 n + \dots + c_m n^m) \cdot \lambda^n\}$, где $c_0, c_1, \dots, c_m$ – некоторые числа, если λ не является корнем характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ;
2) $\{n^r \cdot (c_0 + c_1 n + \dots + c_m n^m) \cdot \lambda^n\}$, где $c_0, c_1, \dots, c_m$ – некоторые числа, если λ – корень кратности r характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ.

Решение задачи о сложности построения полинома Жегалкина

Пример 2. Найти число $L(n)$ операций сложения при построении полинома Жегалкина функции алгебры логики, зависящей от n переменных.

Решение. Напомним ЛНРУ

$$L(n+1) - 2L(n) = 2^n.$$

Для соответствующего ему ЛОРУ

$$L_{\text{одн.}}(n+1) - 2L_{\text{одн.}}(n) = 0$$

найдем корни его характеристического многочлена:

$$P(x) = x - 2 = 0; \; x = 2.$$

Решение задачи о сложности построения полинома Жегалкина

Решение (продолжение). По теореме 3 выписываем общее решение ЛОРУ:

$$L_{\text{одн.}}(n) = C \cdot 2^n$$

где C – произвольное комплексное число.
Заметим, что $g(n) = 2^n$, и $\lambda = 2$ – корень кратности 1 характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ.
Поэтому по теореме 7 частное решение ЛНРУ ищем в виде

$$L^*(n) = n \cdot (c_0 \cdot 2^n),$$

в котором надо найти коэффициент c_0.

Решение задачи о сложности построения полинома Жегалкина

Решение (продолжение). Подставляем элементы $L^*(n)$ в ЛНРУ и получаем

$$(n+1) \cdot c_0 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot n \cdot c_0 \cdot 2^n = 2^n.$$

Откуда

$$(n+1) \cdot c_0 \cdot 2 - 2 \cdot n \cdot c_0 = 1; \; 2 \cdot c_0 = 1; \; c_0 = \frac{1}{2}.$$

Нашли частное решение ЛНРУ

$$L^*(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Решение задачи о сложности построения полинома

Решение (продолжение). Следовательно, по теореме 6 общее решение ЛНРУ уравнения имеет вид

$$L(n) = C \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}.$$

Для того, чтобы найти неизвестный коэффициент C, подставим в общее решение начальное значение $L(1) = 1$. Получим

$$C \cdot 2 + 1 = 1; \;\; C = 0.$$

Следовательно, мы нашли сложность построения быстрым методом полиномов функций алгебры логики:

$$L(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 3.1–3.7

2. Доказать, что геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью.

3. Доказать, что последовательности

$$\begin{array}{ll} 1) & 1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots; \\ 2) & 1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3, \dots; \end{array}$$

являются возвратными.

Литература к лекции

1. Редькин Н.П. Дискретная математика. С-Пб.–М.–Краснодар.: Лань, 2006. Гл. I, с. 10-13.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII с. 265-267.

Конец лекции