Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 37

Абстракция моделей
Редукция по конусу влияния
Абстракция данных

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Абстракция моделей

Абстракция модели — это устранение из неё деталей, которые по тем или иным причинам считаются излишними (избыточными, несущественными) и не влияют на результаты анализа интересующих свойств

Абстракция — это самый действенный способ решения проблемы комбинаторного взрыва числа состояний

Для примера рассмотрим два метода абстракции:

1. Редукция по конусу влияния
2. Абстракция данных

Эти методы применяются к описанию модели, более «высокоуровневому» по сравнению с моделью Крипке, и потому позволяют избежать построения чрезмерно большой модели Крипке, упрощая модель до начала её построения

Абстракция моделей

Редукция по конусу влияния применяется к системам, состояния которых задаются как наборы значений заданных переменных

Основная идея метода состоит в том, чтобы устранить из системы те переменные, которые не содержатся в спецификации и не оказывают на спецификацию никакого *влияния*

То есть удаляются переменные, которые с точки зрения спецификации являются *фиктивными*

Абстракция данных состоит в отображении «реальных» значений переменных (которых может быть очень много) в небольшое число *абстрактных* значений данных с сохранением интересующих свойств исходной системы

Например, если абстрактная система симулирует исходную, то можно гарантировать сохранение выполнимости спецификаций из достаточно широкого фрагмента языка ACTL*

Редукция по конусу влияния

Рассмотрим систему, состояния которой определяются как всевозможные наборы значений переменных множества $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, а переходы определяются согласно рассказанному для символьных представлений относительно двух комплектов переменных и задаются уравнениями вида

$$v_i' = f_i(v_1, \ldots, v_n)$$

Пусть в спецификации системы используются только переменные множества W, $W \subseteq V$

Для упрощения системы можно было бы попробовать удалить из неё все переменные, которые не входят в W

Но увы, так сделать «в лоб» нельзя: значения переменных из W могут прямо или косвенно зависеть от значений переменных из $W \setminus V$

Редукция по конусу влияния

Системой при обсуждении конусов влияния будем называть четвёрку $\mathfrak{S} = (V, X, \vec{f}, W)$ такого вида:

- $V = (v_1, \ldots, v_n)$ — конечный набор булевых переменных, $n \geq 1$
- $X \subseteq \{0,1\}^n$ — множество начальных оценок переменных
- $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — набор n-местных булевых функций, задающих уравнения системы
- W — множество наблюдаемых переменных, $W \subseteq V$

Для такой системы $\mathfrak{S}$ модель Крипке $M_{\mathfrak{S}} = (S, S_0, \to, L)$ устроим так:

- $S = \{0,1\}^n$
- $S_0 = X$
- $\to$ — множество переходов, символьное представление которого имеет вид $\&_{i=1}^{n} (v_i' \leftrightarrow f_i(v_1, \ldots, v_n))$
- $L(s) = \{v_i \mid s[i] = 1, v_i \in W\}$

Редукция по конусу влияния

Конусом влияния $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(W)$ множества переменных W в системе $\mathfrak{S}$ будем называть наименьшее множество переменных, для которого верно следующее:

- $W \subseteq \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(W)$
- Если для переменной v_i из $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(W)$ функция f_i системы $\mathfrak{S}$ существенно зависит от переменной v_m, то $v_m \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(W)$

Метод редукции по конусу влияния состоит в удалении всех переменных системы, не входящих в конус влияния переменных, значения которых используются в спецификации системы

Редукция по конусу влияния

Пример (счётчик по модулю 8)

Рассмотрим систему над переменными $V = (v_0, v_1, v_2)$, принимающими значения $\{0, 1\}$ и задаваемую системой

$$\begin{cases} v_0' &= \neg v_0 \\ v_1' &= v_0 \oplus v_1 \\ v_2' &= (v_0 \,\&\, v_1) \oplus v_2 \end{cases}$$

Для множества $\{v_0\}$ конусом влияния является $\{v_0\}$

Для множеств $\{v_1\}$ и $\{v_0, v_1\}$ конусом влияния является $\{v_0, v_1\}$

Для множеств переменных, содержащих v_2, конус влияния — это множество всех переменных

Таким образом, если в спецификации существенным является только значение переменной v_0, то систему можно упростить, оставив только первое уравнение, и если в спецификации не используется значение v_2, то из системы можно удалить третье уравнение

Редукция по конусу влияния

Записью $M|_W$ для модели Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$ и подмножества W атомарных высказываний обозначим модель, получающуюся из M заменой каждой метки $L(s)$ на $L(s) \cap W$

Утверждение. Для любой модели Крипке M и любой ctl*-формулы φ над атомарными высказываниями W верна равносильность

$$M \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad M|_W \models \varphi$$

Систему $\mathcal{R}(\mathfrak{S}, W)$, получающуюся из $\mathfrak{S} = (V, X, \vec{f}, U)$ редукцией по множеству переменных W, зададим как четвёрку $(C, Y, \vec{g}, U \cap W)$, где:

- C — множество $C_{\mathfrak{S}}(W)$ с таким же порядком переменных, как в V
- Y получается из X удалением разрядов всех наборов, отвечающих расположению переменных из $V \setminus C_{\mathfrak{S}}(W)$ в V
- $\vec{g}$ — функции из $\vec{f}$, отвечающие переменным из C

Редукция по конусу влияния

Утверждение. **Для любой системы $\mathfrak{S}$ и любого подмножества переменных W верно соотношение**

$$M_{\mathfrak{S}}|_W \sim_b M_{\mathcal{R}(\mathfrak{S},W)}$$

Можете доказать это утверждение самостоятельно, основываясь на отношении бисимуляции, состоящем из всех пар $(x, y) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^{|C_{\mathfrak{S}}(W)|}$, в которых y получается из x вычёркиванием разрядов, отвечающих переменным не из конуса влияния

Следствие. **Для любых системы $\mathfrak{S}$, подмножества её переменных W и ctl*-формулы φ над атомарными высказываниями W верно**

$$M_{\mathfrak{S}}|_W \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{R}(\mathfrak{S},W)} \models \varphi$$

Абстракция данных

Редукция системы основывалась на том, что редуцированная система бисимуляционно эквивалентна исходной: системы до и после имеют одинаковую степень детализации и отличаются только удалением несущественных переменных

Абстракция данных обычно приводит к существенному снижению детальности модели, и бисимуляционную эквивалентность для таких целей использовать нецелесообразно

Вместо этого разумно использовать более «слабое» отношение эквивалентности, предполагающее существенно различающиеся эквивалентные модели и гарантирующее при этом сохранение свойств достаточно многих свойств — например, отношение симуляции

Абстракция данных

Рассмотрим модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$ и разбиение $\mathfrak{B} = [B_1, \ldots, B_n]$ множества S, согласованное с функцией разметки модели M: для любой пары состояний s, r из одного предиката разбиения верно $L(s) = L(r)$

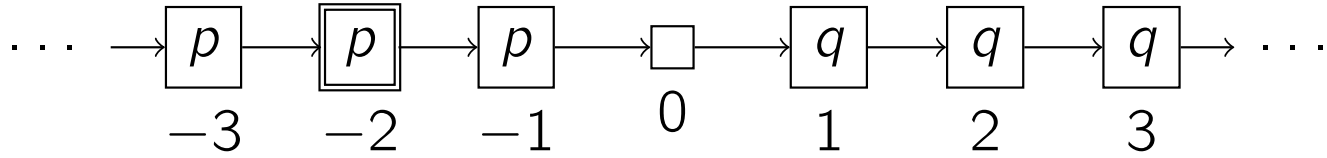
Абстракцией модели M, порождённой согласованным разбиением $\mathfrak{B}$ называется модель $\mathcal{A}(M, \mathfrak{B}) = (S', S'_0, \mapsto, L')$, где:

- $S' = \mathfrak{B}$
- $S'_0 = \{B_i \mid B_i \in \mathfrak{B},\ B_i \cap S_0 \neq \emptyset\}$
- $B_i \mapsto B_j \quad \Leftrightarrow \quad$ существуют состояния $s_i \in B_i$ и $s_j \in B_j$, такие что $s_i \to s_j$
- $L'(B_i) = L(s)$, где $s \in B_i$

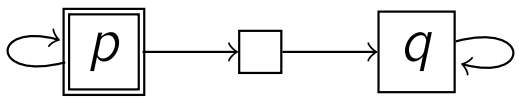
Абстракция данных

Пример

Абстракцией (бесконечной) модели M



для разбиения $\mathfrak{B} = [\{i \mid i \in \mathbb{Z},\ i \leq -1\}, \{0\}, \{j \mid j \in \mathbb{Z}, j \geq 1\}]$ $(\mathcal{A}(M, \mathfrak{B}))$ является модель



Утверждение. **Для любой модели Крипке M и любого согласованного разбиения $\mathfrak{B}$ её множества состояний верно:** $M \preceq abstr(M, \mathfrak{B})$

И это тоже можете попробовать доказать самостоятельно

Следствие. **Для любых модели Крипке M, разбиения $\mathfrak{B}$ её множества состояний, согласованного с функцией разметки, и actl*-формулы φ верно:** **если** $abstr(M, \mathfrak{B}) \models \varphi$**, то** $M \models \varphi$