

Лекция 2. Алгоритм распознавания полноты в  $P_k$ . Замкнутые классы. Классы функций, сохраняющих множество и сохраняющих разбиение, их замкнутость. Теорема Кузнецова о функциональной полноте. Предполные классы.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Алгоритм распознавания полноты

**Теорема 1** (о существовании алгоритма, распознающего полноту в  $P_k$ ). Пусть  $k \geq 3$ . Существует детерминированный алгоритм, которому на вход подается конечная система функций

$$A = \{f_1, \dots, f_t\} \subseteq P_k, \quad t \geq 1,$$

и который всегда через конечное число шагов останавливается и выдает ответ «да», если система  $A$  — полна, и выдает ответ «нет», если система  $A$  не является полной.

**Доказательство.**

Т. к. можно добавлять несущественные переменные, будем считать, что все функции  $f_j$  зависят от одного и того же набора переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

# Алгоритм распознавания полноты

**Доказательство.** По индукции построим последовательность множеств

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq P_k^{(2)}.$$

*Базис индукции.*  $N_0 = \{x_1, x_2\}$ .

*Индуктивный переход.* Пусть множество  $N_r \subseteq P_k^{(2)}$  уже построено. Для каждой функции  $f_j \in A$ ,  $j = 1, \dots, t$ , рассмотрим все функции, которые получаются подстановкой вместо ее переменных функций из множества  $N_r$ . Положим

$$N_{r+1} = N_r \cup \{f_j(g_1(x_1, x_2), \dots, g_n(x_1, x_2)) \mid g_i \in N_r\},$$

где  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, t$ .

Например, множество  $N_1$  содержит все функции, которые можно построить, если вместо переменных функций  $f_j \in A$ ,  $j = 1, \dots, t$ , подставлять только переменные  $x_1$  и  $x_2$ .

# Алгоритм распознавания полноты

**Доказательство.**

Т.к.  $N_r \subseteq P_k^{(2)}$  для всех  $r$  и  $|P_k^{(2)}| = k^{k^2}$ , т.е. множество  $P_k^{(2)}$  — конечно, найдется такое  $r^*$ ,  $r^* \geq 1$ , что

$$N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_{r^*-1} \subset N_{r^*} = N_{r^*+1} = \dots$$

# Алгоритм распознавания полноты

Покажем, что  $N_{r^*} = [A]_{x_1, x_2}$ , где  $[A]_{x_1, x_2} = [A] \cap P_k^{(2)}$ .

Другими словами, покажем, что в множестве  $N_{r^*}$  содержатся в точности все те функции переменных  $x_1, x_2$ , которые можно выразить формулами над  $A$ .

1. Если  $f \in N_{r^*}$ , то по построению  $f \in [A]_{x_1, x_2}$  (почему?).  
Значит,  $N_{r^*} \subseteq [A]_{x_1, x_2}$ .

# Алгоритм распознавания полноты

**Доказательство.**

2. Пусть теперь  $f(x_1, x_2) \in [A]$ .

По определению это означает, что функцию  $f(x_1, x_2)$  можно выразить некоторой формулой  $F$  над  $A$ , причем в этой формуле  $F$  встречаются только переменные  $x_1, x_2$ .

Докажем индукцией по числу  $d$  вхождений в формулу  $F$  функций из  $A$ , что  $f \in N_{r^*}$ .

1) *Базис индукции:*  $d = 0$ . Если  $F = x_1$  или  $F = x_2$ , то  $f \in N_0$ , а значит,  $f \in N_{r^*}$ .

# Алгоритм распознавания полноты

2) *Индуктивный переход.* Пусть любая функция переменных  $x_1, x_2$  из  $[A]$ , которая может быть выражена формулой с не более, чем  $d_0$ , вхождениями функций из  $A$ , содержится также и в  $N_{r^*}$ .

Рассмотрим функцию  $f(x_1, x_2) \in [A]$ , которая выражается формулой  $F$  с  $d_0 + 1$  вхождениями функций из  $A$ .

Тогда  $F = f_j(F_1, \dots, F_n)$ , где  $f_j \in A$ , а  $F_i$  — формула с не более, чем  $d_0$ , вхождениями функций из  $A$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

По предположению индукции  $f_{F_i} \in N_{r^*}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Следовательно, по построению  $f \in N_{r^*+1}$ . Но  $N_{r^*+1} = N_{r^*}$ .

Поэтому  $f \in N_{r^*}$ . Значит,  $[A]_{x_1, x_2} \subseteq N_{r^*}$ .

Равенство  $N_{r^*} = [A]_{x_1, x_2}$  обосновано.

# Алгоритм распознавания полноты

## Доказательство.

Пусть алгоритм останавливается, когда построено такое множество  $N_{r^*}$ , что  $N_{r^*} = N_{r^*+1}$ .

Тогда

- 1) если  $V_k(x_1, x_2) \in N_{r^*}$ , то ответ «да» в силу полноты системы  $\{V_k\}$ ;
- 2) если  $V_k(x_1, x_2) \notin N_{r^*}$ , то ответ «нет», т. к.  $[A]$  не содержит даже все функции от двух переменных (в силу доказанного равенства  $[A]_{x_1, x_2} = N_{r^*}$ ).

□

Что можно сказать о сложности алгоритма из теоремы 1?

Он крайне трудоемок и не годится для применения на практике.



# Полнота в $P_k$

А есть ли алгоритм распознавания полноты в  $P_2$ ? Да, он основан на теореме Поста и заключается в проверке свойств сохранения констант, линейности, самодвойственности и монотонности для функций из исходной системы  $A \subseteq P_2$ .

Можно ли в  $P_k$  при  $k \geq 3$  доказать теорему, аналогичную теореме Поста в  $P_2$ ?

Да, это теорема Кузнецова. Мы ее докажем чуть позже.

# Замкнутый класс

Пусть  $A \subseteq P_k$ ,  $k \geq 2$ . Множество  $A$  называется **замкнутым классом** в  $P_k$ , если  $[A] = A$ .

# Замкнутые классы

**Утверждение 1.** Пусть  $k \geq 2$  и  $A \subseteq P_k$ . Если  $x \in A$  и для любых  $f_0(y_1, \dots, y_m) \in A$ ,  $f_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}) \in A$ ,  $i = 1, \dots, m$ , выполняется

$$f_0(f_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}), \dots, f_m(x_{m,1}, \dots, x_{m,n_m})) \in A,$$

то множество  $A$  является замкнутым классом.

# Замкнутые классы

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную формулу  $F$  над  $A$ , которая выражает некоторую функцию  $f \in P_k$ .

Докажем индукцией по числу  $d$  вхождений в формулу  $F$  функций из  $A$ , не равных тождественной функции, что  $f \in A$ .

1) *Базис индукции:*  $d = 0$ . Если  $F = x$ , то  $f \in A$ .

## Замкнутые классы

2) *Индуктивный переход.* Пусть любая функция, которая может быть выражена формулой с не более, чем  $d_0$ , вхождениями функций из  $A$ , не равных тождественной функции, содержится в  $A$ .

Рассмотрим функцию  $f(x_1, \dots, x_n) \in [A]$ , которая выражается формулой  $F$  с  $d_0 + 1$  вхождениями функций из  $A$ , не равных тождественной функции.

Тогда  $F = f_0(F_1, \dots, F_m)$ , где  $f_0 \in A$ , а  $F_i$  — формула с не более, чем  $d_0$ , вхождениями функций из  $A$ , не равных тождественной функции,  $i = 1, \dots, m$ .

По предположению индукции  $f_{F_i} \in A$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Далее по условию утверждения  $f \in A$ . □

## Функция, сохраняющая множество

Пусть  $E \subseteq E_k$ . Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  **сохраняет множество  $E$** , если для любых  $a_1, \dots, a_n \in E$  выполняется  $f(a_1, \dots, a_n) \in E$ .

Множество всех функций из  $P_k$ , сохраняющих множество  $E \subseteq E_k$ , обозначим  $T_k(E)$ .

# Класс функций, сохраняющих множество

**Утверждение 2.** Пусть  $k \geq 2$ . Для каждого множества  $E \subseteq E_k$  множество  $T_k(E)$  — замкнутый класс.

**Доказательство.** Пусть  $E \subseteq E_k$ . Заметим, что  $x \in T_k(E)$ .

Пусть  $f_0(y_1, \dots, y_m) \in T_k(E)$  и  $f_i(x_1, \dots, x_n) \in T_k(E)$ , где  $i = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Далее если  $a_1, \dots, a_n \in E$ , то

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= f_0(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)) = \\ &= f_0(b_1, \dots, b_m) \in E, \end{aligned}$$

т. к.  $b_1, \dots, b_m \in E$ . Значит,  $f \in T_k(E)$ . □

# Классы функций, сохраняющих множество

**Утверждение 3.** Пусть  $k \geq 2$  и  $E \subseteq E_k$ . Тогда  $T_k(E) = P_k$ , если и только если  $E = \emptyset$  или  $E = E_k$ .

**Доказательство.**

- 1) Если  $E = \emptyset$ , то  $T_k(E) = P_k$ , т. к. никаких условий нет.
- 2) Если  $E = E_k$ , то  $T_k(E) = P_k$ , т. к. для всех функций условие выполнено.
- 3) Если  $E \neq \emptyset$  и  $E \neq E_k$ , то пусть  $a \in E$  и  $b \in E_k \setminus E$ . Рассмотрим такую функцию  $f(x) \in P_k$ , что  $f(a) = b$ . Тогда  $f(x) \notin T_k(E)$ .

□

Пусть  $k = 2$ .

Тогда  $T_2(\{0\}) = T_0$  и  $T_2(\{1\}) = T_1$  — классы, сохраняющие константу ноль и константу один соответственно.



Неполнота системы  $\{\sim x, \max(x, y)\}$  в  $P_k$  при  $k \geq 3$ 

**Пример.** Докажем, что система  $A = \{\sim x, \max(x, y)\}$  — неполна в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

Рассмотрим  $E = \{0, k - 1\} \subseteq E_k$ . Отметим, что  $E \neq E_k$  при  $k \geq 3$ . Кроме того,

$$\begin{aligned}\sim 0 &= k - 1, \quad \sim (k - 1) = 0, \\ \max(a, b) &\in \{0, k - 1\} \text{ при } a, b \in \{0, k - 1\}.\end{aligned}$$

Значит,  $A \subseteq T_k(E)$ .

Получаем:

$$[A] \subseteq [T_k(E)] = T_k(E) \neq P_k.$$

Т. е. система  $\{\sim x, \max(x, y)\}$  — неполна в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

При  $k = 2$  система  $\{\sim x = \bar{x}, \max(x, y) = x \vee y\}$  — полна.

# Разбиение множества

Семейство  $D = \{D_1, \dots, D_s\}$  называется **разбиением** множества  $E_k$ , если

1)  $D_i \neq \emptyset$  при  $i = 1, \dots, s$ ;

2)  $D_i \cap D_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ ;

3)  $\bigcup_{i=1}^s D_i = E_k$ .

## Функция, сохраняющая разбиение

Пусть  $D = \{D_1, \dots, D_s\}$  — разбиение множества  $E_k$ . Элементы  $a, b \in E_k$  называются **эквивалентными** по разбиению  $D$ , если найдется такое подмножество  $D_i \in D$ , что  $a, b \in D_i$ .

Обозначение:  $a \sim_D b$ .

Наборы  $\alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n) \in E_k^n$  называются **эквивалентными** по разбиению  $D$ , если  $a_i \sim_D b_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Обозначение:  $\alpha \sim_D \beta$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  **сохраняет разбиение  $D$** , если для любых пар наборов  $\alpha, \beta \in E_k^n$  из  $\alpha \sim_D \beta$  следует  $f(\alpha) \sim_D f(\beta)$ .

Множество функций из  $P_k$ , сохраняющих разбиение  $D$ , обозначим  $U_k(D)$ .

# Класс функций, сохраняющих разбиение

**Утверждение 4.** Пусть  $k \geq 2$ . Для каждого разбиения  $D$  множества  $E_k$  множество  $U_k(D)$  — замкнутый класс.

**Доказательство.** Пусть  $D$  — разбиение множества  $E_k$ . Заметим, что  $x \in U_k(D)$ .

Пусть  $f_0(y_1, \dots, y_m) \in U_k(D)$  и  $f_i(x_1, \dots, x_n) \in U_k(D)$ , где  $i = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Тогда если  $\alpha, \beta \in E_k^n$  и  $\alpha \sim_D \beta$ , то

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f_0(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = f_0(\gamma), \\ f(\beta) &= f_0(f_1(\beta), \dots, f_m(\beta)) = f_0(\delta), \end{aligned}$$

и  $f(\alpha) \sim_D f(\beta)$ , т. к.  $\gamma \sim_D \delta$ . Значит,  $f \in U_k(D)$ . □

## Классы функций, сохраняющих разбиение

**Утверждение 5.** Пусть  $k \geq 2$  и  $D = \{D_1, \dots, D_s\}$  — разбиение множества  $E_k$ . Тогда  $U_k(D) = P_k$ , если и только если  $s = 1$  или  $s = k$ .

**Доказательство.**

1) Если  $s = 1$ , то  $U_k(D) = P_k$ , т. к. все элементы  $E_k$  эквивалентны по разбиению.

2) Если  $s = k$ , то  $U_k(D) = P_k$ , т. к. эквивалентность по разбиению обозначает равенство элементов  $E_k$ .

3) Если  $1 < s < k$ , то найдется подмножество  $D_i \in D$ , в котором не менее двух элементов, т. е.  $a, b \in D_i$ ,  $a \neq b$ , и найдется еще хотя бы одно подмножество  $D_j \in D$ ,  $i \neq j$ , и пусть  $c \in D_j$ . Рассмотрим такую функцию  $f(x) \in P_k$ , что  $f(a) = a$ ,  $f(b) = c$ . Тогда  $f(x) \notin U_k(D)$ .

□

В  $P_2$  нет не совпадающих в нем классов, сохраняющих разбиение.

# Неполнота одной системы в $P_k$ при $k \geq 3$

**Пример.** Докажем, что система  $A = \{0, 1, \dots, k-1, j_0(x), j_1(x), \dots, j_{k-1}(x), \max(x, y), \min(x, y)\}$  — неполна в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

Рассмотрим  $D = \{D_1, D_2\}$  — разбиение  $E_k$ , где  $D_1 = \{0, 1\}$ ,  $D_2 = \{2, \dots, k-1\}$ , при этом  $s = 2$ .

Отметим, что  $1 < s < k$  при  $k \geq 3$ .

Каждая константа,  $j_i(x)$ ,  $i \in E_k$ ,  $\max(x, y)$ ,  $\min(x, y)$  сохраняют разбиение  $D$ . Значит,  $A \subseteq U_k(D)$ .

Получаем:

$$[A] \subseteq [U_k(D)] = U_k(D) \neq P_k.$$

Т.е. система  $A$  — неполна в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

При  $k = 2$  система

$\{0, 1, j_0(x) = \bar{x}, j_1(x) = x, \max(x, y) = x \vee y, \min(x, y) = xy\}$  — полна.

# Полнота некоторой системы в $P_k$ при $k \geq 3$

**Пример.** Докажите, что система

$A = \{0, 1, \dots, k-1, J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), x+y, x \cdot y\}$  —  
полна в  $P_k$  при всех  $k \geq 3$ .

# Теорема Кузнецова

**Теорема 2 (А.В. Кузнецова о функциональной полноте).**  
*Пусть  $k \geq 3$ . Существует такое конечное семейство замкнутых и не содержащихся друг в друге классов в  $P_k$*

$$M_1, \dots, M_{s(k)},$$

*что для любого  $A \subseteq P_k$  система  $A$  полна в  $P_k$  тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов  $M_1, \dots, M_{s(k)}$ .*



# Теорема Кузнецова

**Доказательство.**

**1. Построение классов.** Пусть  $N \subseteq P_k^{(2)}$  и

$$n1) N \neq P_k^{(2)};$$

$$n2) x_1 \in N, x_2 \in N;$$

$$n3) [N]_{x_1, x_2} = [N] \cap P_k^{(2)} = N.$$

Пусть  $M(N) \subseteq P_k$  и

$$M(N) = \{f(y_1, \dots, y_m) \in P_k \mid f(g_1(x_1, x_2), \dots, g_m(x_1, x_2)) \in N \\ \text{для всех } g_1, \dots, g_m \in N\}.$$

Другими словами, в  $M(N)$  содержатся все такие функции, что при подстановке вместо их переменных любых функций из  $N$  получается снова функция из  $N$ .

# Теорема Кузнецова

1.1) Покажем, что  $M(N)$  — замкнутый класс.

Заметим, что  $x \in M(N)$ . Пусть  $f_0(z_1, \dots, z_t) \in M(N)$ ,  
 $f_i(y_1, \dots, y_m) \in M(N)$ , где  $i = 1, \dots, t$ .

Рассмотрим функцию

$$f(y_1, \dots, y_m) = f_0(f_1(y_1, \dots, y_m), \dots, f_t(y_1, \dots, y_m)).$$

Тогда для любых функций  $g_1, \dots, g_m \in N$  получаем

$$\begin{aligned} f(g_1(x_1, x_2), \dots, g_m(x_1, x_2)) &= f_0(f_1(g_1(x_1, x_2), \dots, g_m(x_1, x_2)), \dots, \\ & \quad f_t(g_1(x_1, x_2), \dots, g_m(x_1, x_2))) = \\ &= f_0(h_1(x_1, x_2), \dots, h_t(x_1, x_2)) \in N, \end{aligned}$$

т. к.  $h_1(x_1, x_2), \dots, h_t(x_1, x_2) \in N$ . Значит,  $f \in M(N)$ .

# Теорема Кузнецова

1.2) Покажем, что  $M(N) \cap P_k^{(2)} = N$ .

Если  $f(x_1, x_2) \in M(N)$ , то для  $x_1, x_2 \in N$  получаем  $f(x_1, x_2) \in N$ .

Если  $f(x_1, x_2) \in N$  и  $g_1, g_2 \in N$ , то  $f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \in [N]_{x_1, x_2}$ , а значит, по свойству  $n3$  для множества  $N$  верно  $f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \in N$ . Поэтому  $f(x_1, x_2) \in M(N)$ .

# Теорема Кузнецова

1.3) Кроме того,  $M(N) \neq P_k$  по п. 1.2) и свойству  $n1$  для множества  $N$ .

# Теорема Кузнецова

Выберем из семейства замкнутых классов

$$\mathcal{S}(P_k) = \{M(N) \mid N \subseteq P_k^{(2)}, \text{ для } N \text{ верны свойства } n1, n2, n3\}$$

все максимальные (по включению) классы.

Обозначим их как  $M_1, \dots, M_{s(k)}$ .

Они замкнуты по доказанному и не содержатся друг в друге по построению.

# Теорема Кузнецова

2. Обоснование критерия. Докажем, что построенные классы

$$M_1, \dots, M_{s(k)} -$$

искомые.

# Теорема Кузнецова

Пусть  $A \subseteq P_k$ .

2.1) Если  $A \subseteq M_j$  для некоторого  $j$ , то по п. п. 1.1) и 1.3)

$$[A] \subseteq [M_j] = M_j \neq P_k.$$

т. е. система  $A$  — не полна.

# Теорема Кузнецова

2.2) Предположим, что  $A$  не содержится ни в одном классе  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, s(k)$ , но система  $A$  не полна.

Положим  $N_0 = [A] \cap P_k^{(2)}$ .

Тогда

$$n1) N_0 \neq P_k^{(2)};$$

$$n2) x_1, x_2 \in N_0;$$

$$n3) [N_0]_{x_1, x_2} = [N_0] \cap P_k^{(2)} = N_0, \text{ т. к.}$$

$$N_0 \subseteq [N_0] \cap P_k^{(2)} \subseteq [A] \cap P_k^{(2)} = N_0.$$

Значит,  $M(N_0) \in \mathcal{S}(P_k)$ .



# Теорема Кузнецова

Итак, получено, что  $M(N_0) \in \mathcal{S}(P_k)$ .

Но если  $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ , то для любых функций  $g_1, \dots, g_n \in N_0$

$$f(g_1(x_1, x_2), \dots, g_n(x_1, x_2)) \in [A] \cap P_k^{(2)} \subseteq N_0.$$

Поэтому  $A \subseteq M(N_0)$ . Следовательно,  $A \subseteq M(N_0) \subseteq M_j$  для некоторого  $j$  — противоречие.

Значит, система  $A$  — полна. □

# Предполный класс

Пусть  $A \subseteq P_k$ ,  $k \geq 2$ . Множество  $A$  называется **предполным классом** в  $P_k$ , если

- 1)  $[A] \neq P_k$ ;
- 2) для любой функции  $f \in P_k \setminus A$  выполняется  $[A \cup \{f\}] = P_k$ .

## Предполные классы в $P_2$

В  $P_2$  пять предполных классов:  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $M$ .

# Предполные классы в $P_k$

**Утверждение 6.** Пусть  $k \geq 2$ . Классы  $M_1, \dots, M_{s(k)}$  из теоремы Кузнецова — все предполные классы в  $P_k$ .

**Доказательство.**

1. Докажем, что каждый из классов  $M_j$  — предполный.

1)  $[M_j] = M_j \neq P_k$ .

2) Если  $f \in P_k \setminus M_j$ , то множество  $M_j \cup \{f\}$  не содержится ни в одном из классов  $M_1, \dots, M_{s(k)}$ . Значит, по теореме Кузнецова  $[M_j \cup \{f\}] = P_k$ .

# Предполные классы в $P_k$

**Доказательство.**

2. Докажем от противного, что других предполных классов в  $P_k$  нет.

Пусть  $M \subseteq P_k$  — предполный класс и  $M \neq M_j$  для всех  $j = 1, \dots, s(k)$ .

1) Если  $M$  не содержится ни в одном из классов  $M_1, \dots, M_{s(k)}$ , то по теореме Кузнецова  $[M] = P_k$  — противоречие с п. 1 определения предполного класса.

2) Пусть  $M \subseteq M_j$  для некоторого  $j$ ,  $1 \leq j \leq s(k)$ . Рассмотрим функцию  $f \in M_j \setminus M$ . Тогда  $[M \cup \{f\}] \subseteq [M_j] = M_j \neq P_k$  — противоречие с п. 2 определения предполного класса.  $\square$

# Предполные классы

Для каждого  $k \geq 2$  классы сохранения множества  $T_k(E)$  и сохранения разбиения  $U_k(D)$ , если они не совпадают с  $P_k$ , являются предполными в  $P_k$ .

Но это не все предполные классы в  $P_k$ .

# Предполные классы

При каждом  $k \geq 3$  все предполные классы описаны.

Часть предполных классов в  $P_k$ ,  $k \geq 3$ , найдены  
С.В. Яблонским, А.А. Мартыненко, Ло Чжу Каем.

Завершил описание предполных классов в  $P_k$ ,  $k \geq 3$ , и доказал,  
что других предполных классов нет, И. Розенберг.

## Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, стр. 51–56.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. III 2.1–2.5, 2.13, 2.19.



Конец лекции