

Лекция 3. Существенные функции. Три леммы о  
существенных функциях. Критерий полноты  
Яблонского. Критерий полноты Слупецкого.  
Шефферовы функции.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Существенные функции

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ ,  $k \geq 3$ , называется **существенной**, если она *существенно* зависит не менее, чем от двух переменных.

**Примеры.**  $x + y, x \cdot y, \max(x, y) \in P_k$ .

# Лемма о трех наборах

**Лемма 1 (о трех наборах).** Пусть  $k \geq 3$ . Если  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  — существенная функция, принимающая  $l$ ,  $l \geq 3$ , значений причем (без ограничения общности рассуждений)  $x_1$  и  $x_2$  — ее существенные переменные, то найдутся 3 набора

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in E_k^n,$$

$$\beta = (b_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in E_k^n,$$

$$\gamma = (a_1, c_2, c_3, \dots, c_n) \in E_k^n,$$

на которых функция  $f$  принимает три различных значения.

# Лемма о трех наборах

## Доказательство.

Т.к.  $x_1$  — существенная переменная функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , найдутся такие значения  $a_2, \dots, a_n \in E_k$ , что в последовательности

$$f(0, a_2, \dots, a_n), f(1, a_2, \dots, a_n), \dots, f(k-1, a_2, \dots, a_n)$$

встречаются не менее двух различных значений.

# Лемма о трех наборах

**Доказательство.** Возможны два случая.

1. В этой последовательности встречаются не все различные значения функции  $f$ .

Т.е. найдется такой набор  $\gamma = (a_1, c_2, \dots, c_n) \in E_k^n$ , что значение  $f(\gamma)$  отлично от любого значения в этой последовательности.

Тогда пусть  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n$ .

Выберем такое значение  $b_1 \in E_k$ , чтобы для

$\beta = (b_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n$  выполнялось неравенство  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ .

Такое  $b_1$  всегда можно найти.

Наборы  $\alpha, \beta, \gamma$  — искомые.

# Лемма о трех наборах

**Доказательство.**

2. В этой последовательности встречаются все различные значения функции  $f$ .

Т.к.  $x_2$  — существенная переменная функции  $f$ , найдутся такие значения  $a_1, c_3, \dots, c_n \in E_k$ , что

$$f(a_1, x_2, c_3, \dots, c_n) \neq \text{Const.}$$

Т.е. найдется такое значение  $c_2 \in E_k$ , что для

$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in E_k^n$  и  $\gamma = (a_1, c_2, c_3, \dots, c_n) \in E_k^n$  верно  $f(\alpha) \neq f(\gamma)$ .

Тогда выберем такое значение  $b_1 \in E_k$ , чтобы для  $\beta = (b_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n$  выполнялись неравенства

$$f(\alpha) \neq f(\beta) \text{ и } f(\gamma) \neq f(\beta).$$

Такое  $b_1$  всегда можно найти.

Наборы  $\alpha, \beta, \gamma$  — искомые.

# Лемма о трех наборах

**Пример.** Рассмотрим существенную функцию  $f(x, y) = x + y \in P_5$ , принимающую 5 различных значений. Тогда искомые наборы, например, следующие:

$$\alpha = (0, 0),$$

$$\beta = (1, 0),$$

$$\gamma = (0, 2).$$

Проверим:

$$f(\alpha) = 0,$$

$$f(\beta) = 1,$$

$$f(\gamma) = 2.$$

# Основная лемма

**Лемма 2 (основная).** Пусть  $k \geq 3$ . Если  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  — существенная функция, принимающая  $l$ ,  $l \geq 3$ , значений, то найдутся такие множества  $G_i$ ,  $G_i \subseteq E_k$ ,  $i = 1, \dots, n$ , что

- 1)  $|G_i| \leq l - 1$  для каждого  $i = 1, \dots, n$ ;
- 2) на множестве  $G_1 \times \dots \times G_n \subseteq E_k^n$  функция  $f$  принимает все  $l$  своих различных значений.



# Основная лемма

**Доказательство.** Пусть (без ограничения общности рассуждений)  $x_1$  и  $x_2$  — существенные переменные функции  $f$ . Тогда по лемме 1 найдутся наборы

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n,$$

$$\beta = (b_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n,$$

$$\gamma = (a_1, c_2, \dots, c_n) \in E_k^n,$$

на которых функция  $f$  принимает три различных значения.

Пусть на наборах  $\delta^{(j)} = (d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \dots, d_n^{(j)}) \in E_k^n$ ,  $j = 4, \dots, l$ , функция  $f$  примет оставшиеся  $(l - 3)$  различные значения.

## Основная лемма

Доказательство. Тогда

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$
$\alpha$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$	$z_1$
$\beta$	$b_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_n$	$z_2$
$\gamma$	$a_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_n$	$z_3$
$\delta^{(4)}$	$d_1^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$\dots$	$d_n^{(4)}$	$z_4$
$\dots$				$\dots$		$\dots$
$\delta^{(l)}$	$d_1^{(l)}$	$d_2^{(l)}$	$d_3^{(l)}$	$\dots$	$d_n^{(l)}$	$z_l$
	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$\dots$	$G_n$	

Т.е. множество  $G_i$  состоит из элементов столбца по переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Множества  $G_1, \dots, G_n$  — искомые. □

# Основная лемма

**Пример.** Рассмотрим существенную функцию  $f(x, y) = x + y \in P_5$ , принимающую 5 различных значений. Тогда на следующих наборах:

$$\alpha_0 = (0, 0),$$

$$\alpha_1 = (1, 0),$$

$$\alpha_2 = (0, 2),$$

$$\alpha_3 = (0, 3),$$

$$\alpha_4 = (0, 4),$$

функция  $f(x, y) = x + y$  принимает 5 различных значений.

# Лемма о квадрате

Четверку наборов вида

$$\begin{aligned} & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \end{aligned}$$

назовем **квадратом**.

# Лемма о квадрате

**Лемма 3 (о квадрате).** Пусть  $k \geq 3$ . Если  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  — существенная функция, принимающая  $l$ ,  $l \geq 3$ , значений, то найдется квадрат, на котором функция  $f$  какое-то свое значение принимает **ровно** в одной его точке.

# Лемма о квадрате

**Доказательство.** Пусть (без ограничения общности рассуждений)  $x_1$  и  $x_2$  — существенные переменные функции  $f$ . Тогда по лемме 1 найдутся наборы

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n,$$

$$\beta = (b_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n,$$

$$\gamma = (a_1, c_2, \dots, c_n) \in E_k^n,$$

на которых функция  $f$  принимает три различных значения  $u$ ,  $v$  и  $w$  соответственно.

# Лемма о квадрате

**Доказательство.** Тогда рассмотрим последовательность квадратов:

Наборы		Значения $f$ на них
$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$(b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$\{u, v\}$
$(a_1, c_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$(b_1, c_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$\{u, v\}$
$(a_1, c_2, c_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$(b_1, c_2, c_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$\{u, v\}$
...	...	...
$(a_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, a_n)$	$(b_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, a_n)$	$\{u, v\}$
$(a_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)$	$(b_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)$	$\{w, ?\}$

Если искомый квадрат не был получен ранее, он обязательно появится на заключительном шаге. □

# Лемма о квадрате

**Пример.** Рассмотрим существенную функцию  $f(x, y) = x + y \in P_3$ , принимающую 3 различных значения. Тогда на следующем квадрате:

$$(0, 0), (1, 0), (0, 2), (1, 2)$$

функция  $f(x, y) = x + y$  принимает значение 1 только в одной точке (на наборе  $(1, 0)$ ).



# Критерий полноты Яблонского

**Теорема 4 (С.В. Яблонского)** Пусть  $k \geq 3$ ,  $A \subseteq P_k$  и множество  $A$  содержит все функции одной переменной, принимающие не более  $(k - 1)$  значения.

Тогда система  $A$  полна в  $P_k$  в том и только в том случае, когда она содержит существенную функцию, принимающую все  $k$  значений.

# Критерий полноты Яблонского

## Доказательство.

*Необходимость.* Пусть  $A$  — полная система.

- 1) Если она не содержит существенную функцию, то из системы  $A$  не получить никакую функцию с более, чем одной, существенной переменной.
- 2) Если в ней существенные функции, принимающие не все  $k$  значений, то из системы  $A$  не получить никакую функцию, принимающую все  $k$  значений.

Необходимость обоснована.

# Критерий полноты Яблонского

## Доказательство.

*Достаточность.* Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in A$  — существенная функция, принимающая  $k$  значений.

Докажем, что произвольную функцию  $g(y_1, \dots, y_m) \in P_k$  можно построить формулой над функциями системы  $A$ .

Доказательство проведем индукцией по числу  $l$ ,  $l \leq k$ , значений, которые принимает функция  $g$ .

# Критерий полноты Яблонского

**Доказательство.**

*Базис индукции:*  $l = 2$ .

Пусть функция  $g(y_1, \dots, y_m) \in P_k$  принимает 2 значения  $s, t \in E_k, s < t$ .

По лемме о квадрате для существенной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  найдется квадрат

$$\begin{aligned} & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ & (a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c}_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c}_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \end{aligned}$$

на котором функция  $f$  некоторое свое значение  $u$  принимает ровно в одной точке, например, в точке  $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$ .

Т.к. система  $A$  содержит все константы, построим функцию

$$\varphi(x_i, x_j) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

# Критерий полноты Яблонского

**Доказательство.** Рассмотрим функции

$$\psi_1(z) = \begin{cases} b_i, & z = s, \\ c_i, & z = t, \end{cases} ; \psi_2(z) = \begin{cases} b_j, & z = s, \\ c_j, & z = t, \end{cases}$$

и

$$\psi_0(z) = \begin{cases} s, & z = u, \\ t, & z \neq u. \end{cases}$$

Отметим, что  $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in A$ .

Тогда можно построить функцию максимума из элементов  $s, t$ :

$$\max^{s,t}(x, y) = \psi_0(\varphi(\psi_1(x), \psi_2(y))).$$

Аналогично можно построить функцию минимума из элементов  $s, t$ :  $\min^{s,t}(x, y)$ .

# Критерий полноты Яблонского

**Доказательство.** Отметим, что для функций

$$j_i^{s,t}(z) = \begin{cases} t, & z = i, \\ s, & z \neq i. \end{cases}$$

верно  $j_i^{s,t} \in A$ ,  $i \in E_k$ .

Тогда аналогично 1-й форме получаем:

$$g(y_1, \dots, y_m) = \max_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in E_k^m} \min^{s,t} (j_{\sigma_1}^{s,t}(x_1), \dots, j_{\sigma_m}^{s,t}(x_m), g(\sigma)).$$

Базис индукции обоснован.

## Критерий полноты Яблонского

*Индуктивный переход.* Пусть все функции из  $P_k$ , принимающие не более  $(l - 1)$  значения, уже построены.

Рассмотрим функцию  $g(y_1, \dots, y_m) \in P_k$ , принимающую ровно  $l$  значений:  $s_1, \dots, s_l$ .

По основной лемме для существенной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , принимающей  $l$  значений, найдутся такие множества  $G_i$ , что  $|G_i| \leq l - 1$  и на множестве  $G_1 \times \dots \times G_n$  функция  $f$  принимает  $l$  различных значений.

Если  $l < k$ , то при необходимости дополнительной функцией  $\psi(z) \in A$  переведем эти значения в  $s_1, \dots, s_l$ .

Пусть

$$f(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) = s_j, \quad j = 1, \dots, l,$$

где  $(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) \in G_1 \times \dots \times G_n$ .

# Критерий полноты Яблонского

Положим

$$\psi_i(b_1, \dots, b_m) = a_i^{(j)},$$

если  $g(b_1, \dots, b_m) = s_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Заметим, что  $\psi_1, \dots, \psi_n$  уже построены.

Тогда

$$g(y_1, \dots, y_m) = f(\psi_1(y_1, \dots, y_m), \dots, \psi_n(y_1, \dots, y_m)).$$

В самом деле, если  $\beta \in E_k^m$  и  $g(\beta) = s_j$ , то

$$s_j = g(\beta) = f(\psi_1(\beta), \dots, \psi_n(\beta)) = f(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) = s_j.$$

Индуктивный переход обоснован.





# Критерий полноты Слупецкого

**Теорема 5 (Слупецкого).** Пусть  $k \geq 3$ ,  $A \subseteq P_k$  и множество  $A$  содержит все функции одной переменной.

Тогда система  $A$  полна в  $P_k$  в том и только в том случае, когда она содержит существенную функцию, принимающую все  $k$  значений.

## Верны ли критерий полноты в $P_2$ ?

Верны ли эти критерии полноты в  $P_2$ ?

Нет. Рассмотрим множество

$$A = \{0, 1, x, \bar{x}, x \oplus y\} \subseteq P_2.$$

Система  $A$  содержит все функции одной переменной и существенную функцию  $x \oplus y$ , принимающую два значения. Но система  $A$  не является полной в  $P_2$ , так как  $A \subseteq L$ .

# Полнота системы $\{j_0(x), x + y\}$ в $P_k$ при $k \geq 3$

**Пример.** Докажем по критерию, что система  $A = \{j_0(x), x + y\}$  — полна в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

1. Покажем, что из системы  $A$  можно получить все функции одной переменной.

В самом деле,  $\underbrace{x + \dots + x}_k = 0$ ,  $j_0(0) = 1$ ,  $1 + 1 = 2$ ,  $2 + 1 = 3$  и

т.д. — все константы построены.

Теперь  $x - a = x + (k - a)$ , где  $a \in E_k$ , и  $j_a(x) = j_0(x - a)$ .

Тогда запишем произвольную функцию  $f(x) \in P_k^{(1)}$  во 2-й форме и получим:

$$f(x) = \sum_{a \in E_k} f(a)j_a(x) = \sum_{a \in E_k} \underbrace{j_a(x) + \dots + j_a(x)}_{f(a)}.$$

Все функции одной переменной построены.

# Полнота системы $\{j_0(x), x + y\}$ в $P_k$ при $k \geq 3$

**Пример** (продолжение).

2. Теперь заметим, что  $x + y \in A$  — существенная функция, принимающая все  $k$  значений.

Значит, система  $A = \{j_0(x), x + y\}$  — полна в  $P_k$  при  $k \geq 3$ .

При  $k = 2$  система  $\{j_0(x) = \bar{x}, x + y = x \oplus y\} \subseteq L$  — неполна.

# Шефферова функция

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  называется **шефферовой**, если  $[\{f\}] = P_k$ .

**Примеры.** Штрих Шеффера  $x/y \in P_2$ , стрелка Пирса  $x \downarrow y \in P_2$ , функция Вебба  $V_k(x, y) \in P_k$ .

# Шефферовы функции

**Теорема 6 (критерий шефферовости функции).** Пусть  $k \geq 3$  и  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ .

*Функция  $f$  является шефферовой в  $P_k$  тогда и только тогда, когда формулами над ней можно выразить все функции одной переменной, принимающие не более  $(k - 1)$  значения.*

**Доказательство.**

*Необходимость очевидна.*

# Шефферовы функции

## Доказательство.

Докажем *достаточность*.

1) Если функция  $f$  не принимает какое-то значение  $v \in E_k$ , то из нее нельзя получить константу  $v$  — противоречие. Значит, функция  $f$  принимает все  $k$  значений.

2) Если функция  $f$  не является существенной, то по п. 1) она — перестановка, и из нее можно получить только перестановки — противоречие. Значит, функция  $f$  — существенная.

Тогда по критерию полноты Яблонского система  $A = \{f\}$  — полна в  $P_k$ . □

Верен ли критерий шефферовости функции в  $P_2$ ?

Верен ли этот критерий шефферовости функции в  $P_2$ ?



## Верен ли критерий шефферовости функции в $P_2$ ?

Да. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  и из  $f$  формулами можно выразить константы 0 и 1. Проверим, что  $f \notin T_0, T_1, L, S, M$ .

Получаем:

- 1)  $f \notin T_0$ , т.к. из нее формулами можно получить  $1 \notin T_0$ , а  $T_0$  — замкнутый класс;
- 2)  $f \notin T_1$ , т.к. из нее формулами можно получить  $0 \notin T_1$ , а  $T_1$  — замкнутый класс;
- 3)  $f \notin S$ , т.к. из нее формулами можно получить  $0 \notin S$ , а  $S$  — замкнутый класс;
- 4)  $f \notin M$ , т.к.  $f \notin T_0, f \notin T_1$ ;
- 5)  $f \notin L$ , т.к. если предположить, что  $f \in L$ , то из  $f \notin T_0$  и  $f \notin T_1$  будет следовать  $f \in S$ , что противоречит  $f \notin S$ .

Значит, по теореме Поста система  $\{f\}$  — полна в  $P_2$ , т.е.  $f$  — шефферова функция.

# Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, стр. 56–65.

Конец лекции