

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 49

Эпистемические логики

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

**Эпистемическая логика** (логика знаний) — это разновидность модальной логики, в которой модальность  $\square$  означает «я знаю», а  $\diamond$  — «я допускаю»

Так как эпистемическая логика является модальной, то в ней справедливы все законы модальной логики

Но смыслом модальностей могут определяться и другие законы

Если «я» — **идеальный познающий субъект**, то совокупность моих знаний и допущений должна подчиняться, помимо общих законов модальных логик, как минимум таким законам:

- ▶ мои знания верны

$$\square\varphi \rightarrow \varphi \quad (\text{закон адекватности знания})$$

- ▶ мне известно, что именно я знаю

$$\square\varphi \rightarrow \square\square\varphi \quad (\text{закон позитивной интроспекции})$$

- ▶ мне известно, что именно я **не** знаю

$$\neg\square\varphi \rightarrow \square\neg\square\varphi \quad (\text{закон негативной интроспекции})$$

Двуместное отношение  $\mapsto$  на множестве  $W$

▶ **рефлексивно**, если для любого элемента  $w$  множества  $W$  верно  $w \mapsto w$

▶ **симметрично**, если для любых элементов  $w_1, w_2$  множества  $W$  справедлива импликация

$$w_1 \mapsto w_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 \mapsto w_1$$

▶ **транзитивно**, если для любых элементов  $w_1, w_2, w_3$  множества  $W$  справедлива импликация

$$w_1 \mapsto w_2 \mapsto w_3 \quad \Rightarrow \quad w_1 \mapsto w_3$$

**Утверждение.** Для любой шкалы Крипке  $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$  верно:

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$  верно для любой формулы  $\varphi$

$\Leftrightarrow$

**отношение  $\mapsto$  рефлексивно**

**Доказательство.**

$(\Rightarrow)$  Пусть отношение  $\mapsto$  нерефлексивно

Тогда существует мир  $w$ , такой что  $w \not\mapsto w$

Рассмотрим переменную  $p$  и модель Крипке  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ , такие что:

- ▶  $p \notin L(w)$
- ▶ Для любой  $w$ -альтернативы  $w'$  верно  $p \in L(w')$

По **выбору**  $w$ , модель  $\mathcal{I}$  задана корректно

При этом  $\mathcal{I}, w \models \Box p$  и  $\mathcal{I}, w \not\models p$ , а значит, и  $\mathcal{I}, w \not\models \Box p \rightarrow p$

Следовательно,  $\mathcal{F} \not\models \Box p \rightarrow p$

**Утверждение.** Для любой шкалы Крипке  $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$  верно:

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$  верно для любой формулы  $\varphi$

$\Leftrightarrow$

отношение  $\mapsto$  рефлексивно

**Доказательство.**

( $\Leftarrow$ ) Пусть отношение  $\mapsto$  рефлексивно

*Предположим от противного*, что существуют формула  $\varphi$ , модель Крипке  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$  и её мир  $w$ , такие что  $\mathcal{I}, w \not\models \Box\varphi \rightarrow \varphi$

По семантике  $\rightarrow$  и  $\Box$ :

1.  $\mathcal{I}, w \not\models \varphi$
2. Для любой  $w$ -альтернативы  $w'$  верно  $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

По рефлексивности  $\mapsto$ , мир  $w$  является  $w$ -альтернативой

Значит,  $\mathcal{I}, w \models \varphi$ , что *противоречит* первому пункту  $\blacktriangledown$

**Утверждение.** Для любой шкалы Крипке  $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$  верно:

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$  верно для любой формулы  $\varphi$

$\Leftrightarrow$

отношение  $\mapsto$  транзитивно

**Утверждение.** Для любой шкалы Крипке  $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$  с рефлексивным и транзитивным отношением  $\mapsto$  верно:

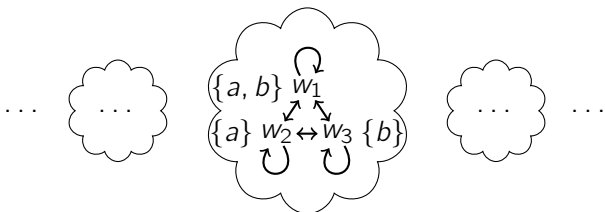
$\mathcal{F} \models \neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$  верно для любой формулы  $\varphi$

$\Leftrightarrow$

отношение  $\mapsto$  симметрично

Можете попробовать самостоятельно доказать эти утверждения по аналогии с утверждением про рефлексивность

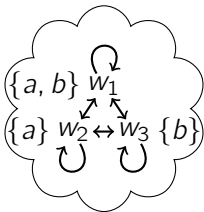
**Следствие.** Модель Крипке идеального познающего субъекта — это модель, отношение переходов которой является **отношением эквивалентности**



## Пояснение

Пусть  $w_1$  — мир достоверных фактов

Тогда **класс эквивалентности**  $w_1$  состоит из всех миров, устройство которых не противоречит информации, которой располагает познающий субъект



## Пояснение

- ▶  $a$  — это факт, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \models a$$

- ▶ ..., но моих знаний недостаточно, чтобы это утверждать, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a$$

- ▶ ..., но и опровергнуть  $a$  я тоже не могу,

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$$

- ▶ а что я точно знаю, так это то, что если не  $a$ , то обязательно  $b$

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box(\neg a \rightarrow b)$$



В более широкой и «полезной» постановке задачи познающий субъект

- ▶ может изменять мир согласно своим скромным возможностям
- ▶ может взаимодействовать с другими такими же субъектами, обмениваясь с ними знаниями
- ▶ пытается достичь некоторой цели, кооперируясь или конкурируя с другими субъектами

Таких взаимодействующих субъектов принято называть **агентами**, а совокупность всех агентов с описанием их возможностей и целей — **мультиагентной системой**

Каждому агенту  $a$  такой системы присваивается своя эпистемическая модальность  $\square_a$ : «агент  $a$  знает, что ...»

Иногда рассматриваются и групповые модальности — например,  $\square_{\forall}$ : «все агенты знают, что ...»

## Пример: задача о трёх мудрецах

Король призвал трёх мудрецов,

показал им три чёрные шапки и две белые, завязал глаза, надел на мудрецов чёрные шапки, спрятал белые и развязал глаза

«Из пяти шапок, что я показал, три надеты на вас», — сказал король

«Знаете ли вы, какая на вас шапка?» — спросил король

«Нет, не знаю», хором ответили мудрецы

«Знаете ли вы, какая на вас шапка?» — повторил король

«Нет, не знаю», хором ответили мудрецы

«Знаете ли вы, какая на вас шапка?» — ещё раз повторил король

«Да, чёрная», хором ответили мудрецы

Как может выглядеть ход рассуждений мудрецов  
в терминах эпистемической логики для мультиагентной системы?