

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 49

Эпистемические логики

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Эпистемическая логика (логика знаний) — это разновидность модальной логики, в которой модальность \square означает «я знаю», а \diamond — «я допускаю»

Так как эпистемическая логика является модальной, то в ней справедливы все законы модальной логики

Но смыслом модальностей могут определяться и другие законы

Если «я» — **идеальный познающий субъект**, то совокупность моих знаний и допущений должна подчиняться, помимо общих законов модальных логик, как минимум таким законам:

- ▶ мои знания верны

$$\square\varphi \rightarrow \varphi \quad (\text{закон адекватности знания})$$

- ▶ мне известно, что именно я знаю

$$\square\varphi \rightarrow \square\square\varphi \quad (\text{закон позитивной интроспекции})$$

- ▶ мне известно, что именно я **не** знаю

$$\neg\square\varphi \rightarrow \square\neg\square\varphi \quad (\text{закон негативной интроспекции})$$

Двуместное отношение \mapsto на множестве W

▶ **рефлексивно**, если для любого элемента w множества W верно $w \mapsto w$

▶ **симметрично**, если для любых элементов w_1, w_2 множества W справедлива импликация

$$w_1 \mapsto w_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 \mapsto w_1$$

▶ **транзитивно**, если для любых элементов w_1, w_2, w_3 множества W справедлива импликация

$$w_1 \mapsto w_2 \mapsto w_3 \quad \Rightarrow \quad w_1 \mapsto w_3$$

Утверждение. Для любой шкалы Крипке $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$ верно:

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$ верно для любой формулы φ

\Leftrightarrow

отношение \mapsto рефлексивно

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть отношение \mapsto нерефлексивно

Тогда существует мир w , такой что $w \not\mapsto w$

Рассмотрим переменную p и модель Крипке $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$, такие что:

- ▶ $p \notin L(w)$
- ▶ Для любой w -альтернативы w' верно $p \in L(w')$

По **выбору** w , модель \mathcal{I} задана корректно

При этом $\mathcal{I}, w \models \Box p$ и $\mathcal{I}, w \not\models p$, а значит, и $\mathcal{I}, w \not\models \Box p \rightarrow p$

Следовательно, $\mathcal{F} \not\models \Box p \rightarrow p$

Утверждение. Для любой шкалы Крипке $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$ верно:

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$ верно для любой формулы φ

\Leftrightarrow

отношение \mapsto рефлексивно

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть отношение \mapsto рефлексивно

Предположим от противного, что существуют формула φ , модель Крипке $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и её мир w , такие что $\mathcal{I}, w \not\models \Box\varphi \rightarrow \varphi$

По семантике \rightarrow и \Box :

1. $\mathcal{I}, w \not\models \varphi$
2. Для любой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

По рефлексивности \mapsto , мир w является w -альтернативой

Значит, $\mathcal{I}, w \models \varphi$, что *противоречит* первому пункту \blacktriangledown

Утверждение. Для любой шкалы Крипке $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$ верно:

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ верно для любой формулы φ

\Leftrightarrow

отношение \mapsto транзитивно

Утверждение. Для любой шкалы Крипке $\mathcal{F} = (W, \mapsto)$ с рефлексивным и транзитивным отношением \mapsto верно:

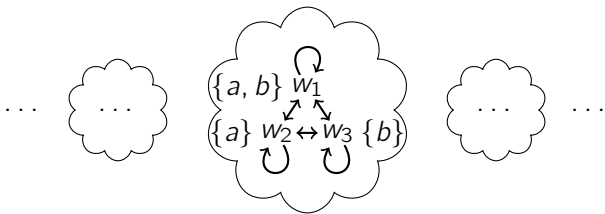
$\mathcal{F} \models \neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$ верно для любой формулы φ

\Leftrightarrow

отношение \mapsto симметрично

Доказательство. Можете попробовать сами по аналогии с утверждением про рефлексивность, если интересуетесь

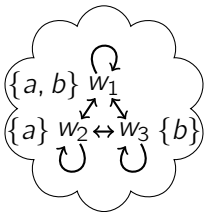
Следствие. Модель Крипке идеального познающего субъекта — это модель, миры которой разбиваются на **классы эквивалентности** по отношению переходов



Пояснение

Пусть w_1 — мир достоверных фактов

Тогда класс эквивалентности w_1 состоит из всех миров, устройство которых не противоречит информации, которой располагает познающий субъект



Пояснение

- ▶ a — это факт, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \models a$$

- ▶ ..., но моих знаний недостаточно, чтобы это утверждать, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a$$

- ▶ ..., но и опровергнуть a я тоже не могу,

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$$

- ▶ а что я точно знаю, так это то, что если не a , то обязательно b

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box(\neg a \rightarrow b)$$

В более широкой и «полезной» постановке задачи познающий субъект

- ▶ может изменять мир согласно своим скромным возможностям
- ▶ может взаимодействовать с другими такими же субъектами, обмениваясь с ними знаниями
- ▶ пытается достичь некоторой цели, кооперируясь или конкурируя с другими субъектами

Таких взаимодействующих субъектов принято называть **агентами**, а совокупность всех агентов с описанием их возможностей и целей — **мультиагентной системой**

Каждому агенту a такой системы присваивается своя эпистемическая модальность \square_a : «агент a знает, что ...»

Иногда рассматриваются и групповые модальности — например, \square_{\forall} : «все агенты знают, что ...»

Пример: задача о трёх мудрецах

Король призвал трёх мудрецов,

показал им три чёрные шапки и две белые, завязал глаза, надел на мудрецов чёрные шапки, спрятал белые и развязал глаза

«Из пяти шапок, что я показал, три надеты на вас», — сказал король

«Знаете ли вы, какая на вас шапка?» — спросил король

«Нет, не знаю», хором ответили мудрецы

«Знаете ли вы, какая на вас шапка?» — повторил король

«Нет, не знаю», хором ответили мудрецы

«Знаете ли вы, какая на вас шапка?» — ещё раз повторил король

«Да, чёрная», хором ответили мудрецы

Как может выглядеть ход рассуждений мудрецов в терминах эпистемической логики для мультиагентной системы?