Языки описания схем

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Языки описания схем

Блок 26

Соответствие между автоматами и схемами

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Схема → автомат

Многие схемы являются автоматами (*тезис будет уточнён позже*)

Это утверждение позволяет во многих случаях облегчить анализ и разработку схемы применением терминологии, характерной для автоматов

Эта терминология уже встречалась в курсе, осталось только её вспомнить и систематизировать

Сделаем это на таком примере:

Σ:

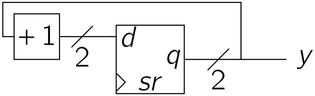
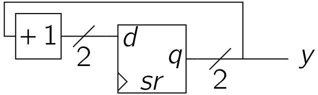


Схема → автомат: состояния, начальное состояние

Σ: 

Состояние схемы в каждый момент времени —
это набор состояний элементов её последовательной части

Состояние каждого элемента — регистра — это набор нолей и единиц заданного размера k, который можно трактовать как число диапазона $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ в k-разрядной двоичной записи

Множество $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ будем обозначать записью $\mathbb{Z}_{(k)}$

Состояния автомата, отвечающего схеме, — это состояния схемы

Например, $\mathbb{Z}_{(2)} = \{0, 1, 2, 3\}$ — это множество состояний схемы Σ выше

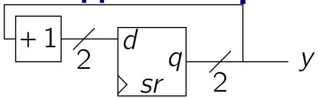
В результате сброса (синхронного или асинхронного) схема переходит в предзаданное (начальное) состояние

Это начальное состояние автомата, отвечающего схеме

Например, 0 — начальное состояние схемы выше

Схема → автомат: входной алфавит

Σ:



Входной алфавит автомата, отвечающего схеме, — это множество всевозможных наборов значений на входах схемы

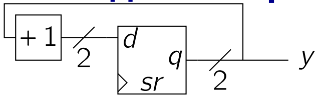
Имеются в виду значения на входах в момент переднего фронта тактового сигнала, то есть в момент перехода синхронной схемы в новое состояние

$[x_1/v_1, \ldots, x_n/v_n]$ — так будем обозначать набор значений $v_1, \ldots, v_n$ в точках $x_1, \ldots, x_n$, и будем называть такой набор оценкой переменных $x_1, \ldots, x_n$

Например, $\{[]\}$ — входной алфавит для схемы Σ выше

Схема $\to$ автомат: выходной алфавит

Σ:



Выходной алфавит автомата, отвечающего схеме, — это множество всевозможных оценок переменных, отвечающих выходам схемы

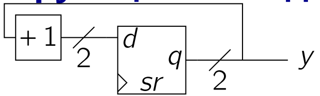
Имеются в виду оценки, содержащие значения, выдающиеся на выходы (весь такт) после переднего фронта тактового сигнала

Автомат (Мура), отвечающий схеме, корректно определён только в том случае, если эти значения однозначно определяются состоянием схемы

Синхронную схему со сбросом, в которой значения на выходах однозначно определяются состоянием схемы, будем называть автоматной схемой

Например, схема Σ — автоматная, и $\{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$ — выходной алфавит для этой схемы

Схема $\to$ автомат: функции выхода и переходов

Σ: 

Функция выхода B автомата, отвечающего автоматной схеме, задаётся так:

$B(q)$ — это набор значений на выходах схемы, находящейся в состоянии q

Например, для схемы Σ выше верно $B(q) = [y/q]$

Функция переходов T автомата, отвечающего автоматной схеме, задаётся так:

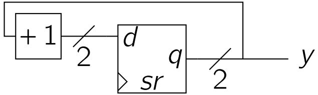
$T(q, a)$ — это состояние, в которое переходит схема, если перед передним фронтом тактового сигнала она находится в состоянии q и имеет значения a на входах

Например, для схемы Σ выше верно:

$$T(0, []) = 1 \qquad T(2, []) = 3$$
$$T(1, []) = 2 \qquad T(3, []) = 0$$

Схема $\to$ автомат: итог

Σ:



Для любой автоматной схемы существует автомат, описывающий изменение состояний и значений на выходах схемы после последнего сброса в зависимости от значений на входах

Например, схеме Σ выше отвечает такой автомат:

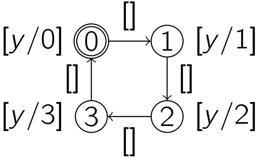
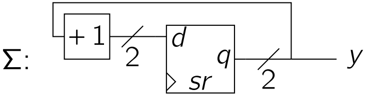
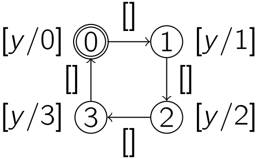
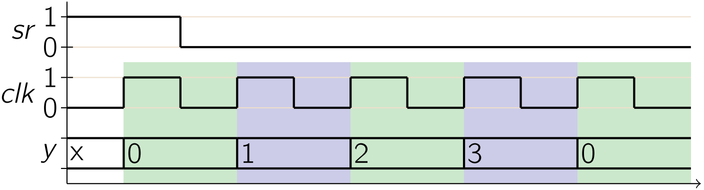


Схема $\to$ автомат: итог





Пример выполнения схемы:



Соответствующее выполнение автомата:

t	1		2		3		4		...	
$x(t)$		[]		[]		[]		[]		...
$q(t)$	0	$\to$	1	$\to$	2	$\to$	3	$\to$	0	...
$y(t)$	[y/0]		[y/1]		[y/2]		[y/3]		[y/0]	...

Автомат $\to$ схема

Любой автомат может быть реализован автоматной схемой

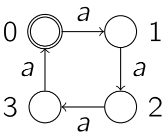
Это утверждение позволяет в ряде случаев облегчить разработку схемы при помощи

- разработки схемы (подсхемы) в виде автомата и
- «типовой» реализации этого автомата автоматной подсхемой

Далее полагаем заданным автомат $\mathcal{A} = (Q, q_0, B, T)$ над алфавитами I входных и O выходных символов

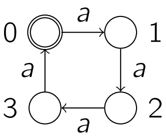
Проиллюстрируем типовую реализацию автомата схемой на таком примере:

$\mathcal{A}$:



Автомат → схема: входы и выходы

$\mathcal{A}$:

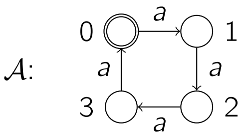


С чего начать, чтобы реализация автомата имела смысл:

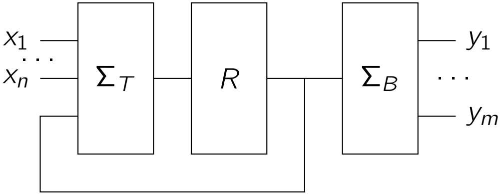
- Определиться с тем, какие входы и выходы будут в схеме
  - Далее I' и O' — множества всевозможных значений на входах и на выходах схемы соответственно
- Выбрать инъективные отображения $\varphi_I : I \to I'$ и $\varphi_O : O \to O'$
  - *Нередко эти отображения тривиальны или почти тривиальны: автомат, предназначенный для схемной реализации, как правило использует соответствующую схемную терминологию*

Например, для автомата $\mathcal{A}$ выше можно положить, что в схемной реализации нет входов, есть один выход y ширины 2, $\varphi_I(a) = []$ и $\varphi_O(m) = [y/m]$

Автомат → схема: типовое устройство



Типовая реализация автомата схемой с входами $x_1, \ldots, x_n$ и выходами $y_1, \ldots, y_m$ устроена так:

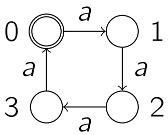


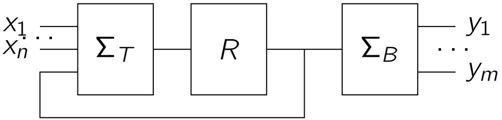
R — это регистр состояния: параллельный регистр, хранящий состояние автомата

Σ_T — это реализация функции переходов комбинационной схемой

Σ_B — это реализация функции выхода комбинационной схемой

Автомат $\to$ схема: регистр состояния

$\mathcal{A}$: 



Ширина k регистра R выбирается произвольно так, чтобы выполнялось неравенство $2^k \geq |Q|$

Выбирается инъективное отображение $\varphi_Q : Q \to \mathbb{Z}_{(k)}$

Если $\varphi_Q(q_0) \neq 0$, то R модифицируется так, чтобы при сбросе в этом регистре сохранялось значение $\varphi_Q(q_0)$

Далее полагаем для технической простоты, что $\varphi_Q(q_0) = 0$

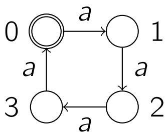
Например, для автомата $\mathcal{A}$ выше можно выбрать $k = 2$ и такое отображение:

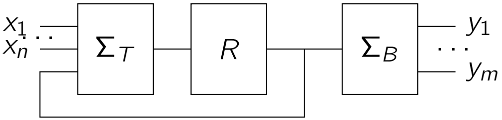
$\varphi_Q(\text{левое верхнее}) = 0$ $\qquad$ $\varphi_Q(\text{правое верхнее}) = 1$

$\varphi_Q(\text{левое нижнее}) = 3$ $\qquad$ $\varphi_Q(\text{правое нижнее}) = 2$

Автомат $\to$ схема: функция выхода

$\mathcal{A}$:





Выбирается отображение $B' : \mathbb{Z}_{(k)} \to O'$, такое что $B'(\varphi_Q(q)) = B(q)$ для всех $q \in Q$

(*Выбор состоит в том, что для чисел m, не входящих в область значений функции φ_Q, значения B' можно выбрать произвольно*)

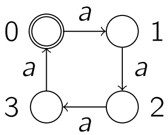
Σ_B — это любая схема, реализующая функцию B'

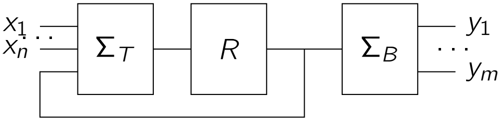
Например, для автомата $\mathcal{A}$ выше:

- Функция B' единственна и задаётся равенством $B'(m) = [y/m]$
- Можно выбрать тривиальную схему Σ_B: вход q направляется на выход y

Автомат → схема: функция переходов

$\mathcal{A}$:





Выбирается отображение $T' : \mathbb{Z}_{(k)} \times I' \to \mathbb{Z}_{(k)}$, такое что $T'(\varphi_Q(q), \varphi_I(a)) = T(q, a)$ для всех $q \in Q$ и $a \in I$

(*Выбор состоит в том, что для чисел m, не входящих в область значений функции φ_Q, значения $T'(m, v)$ можно выбрать произвольно*)

Σ_T — это любая схема, реализующая функцию T'

Например, для автомата $\mathcal{A}$ выше:

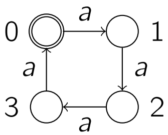
- Функция T' единственна и задаётся так:

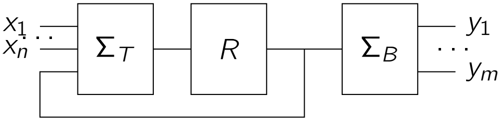
$$T'(0, []) = 1 \qquad T'(2, []) = 3$$
$$T'(1, []) = 2 \qquad T'(3, []) = 0$$

- Σ_T — любая комбинационная схема, реализующая функцию прибавления единицы по модулю 4

Автомат → схема: итог (пример)

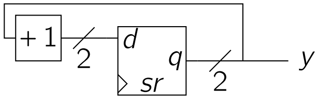
$\mathcal{A}$:



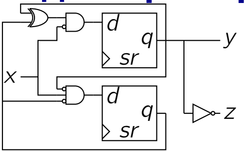


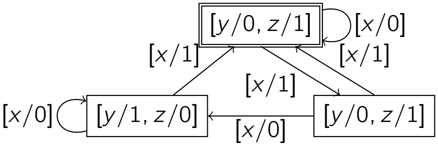
Следующая схема является типовой реализацией изображённого выше автомата $\mathcal{A}$ схемой без входов и с одним выходом y ширины 2 для соответствия $\varphi_O(m) = [y/m]$:

Σ:



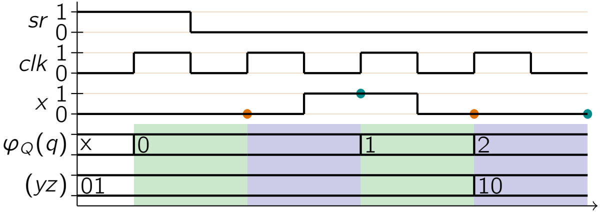
Ещё один пример напоследок





Эти схема и автомат соответствуют друг другу (без учёта состояния автомата, не достижимого из начального)

Пример выполнения схемы Σ:



Соответствующее выполнение автомата $\mathcal{A}$:

t	1		2		3		4		...
$x(t)$		0		1		0		0	...
$q(t)$	q_0	$\to$	q_0	$\to$	q_1	$\to$	q_2	$\to$	...
$y(t)$	$[y/0, z/1]$		$[y/0, z/1]$		$[y/0, z/1]$		$[y/1, z/0]$		...