# Языки описания схем

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Языки описания схем

Блок 26

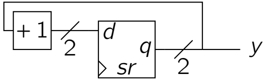
Соответствие между автоматами и схемами

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

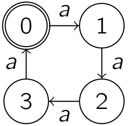
ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

# Вступление

$\Sigma$:



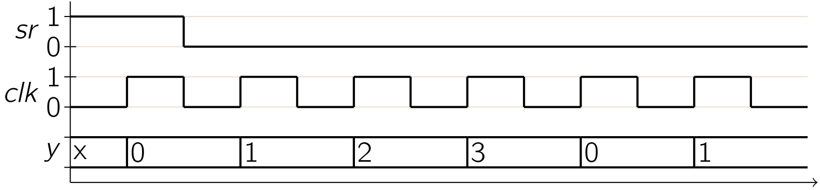

$\mathcal{A}$:



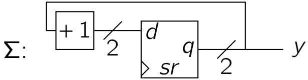

Выполнение $\mathcal{A}$:

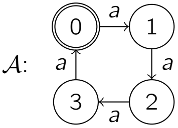
| $t$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | | $a$ | | $a$ | | $a$ | | $a$ | | $a$ | ... |
| $q(t)$ | $q_0$ | $\to$ | $q_1$ | $\to$ | $q_2$ | $\to$ | $q_3$ | $\to$ | $q_0$ | $\to$ | $q_1$ ... |
| $y(t)$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 0 | | 1 ... |

Выполнение $\Sigma$:



# Вступление




**Любой автомат может быть реализован в виде синхронной схемы**

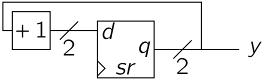
**Многие синхронные схемы со сбросом являются автоматами**

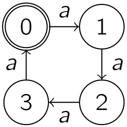
На этих двух тезисах основывается «умная» разработка схем, согласно которой

- схема или её часть проектируется как автомат, и
- разработанный автомат реализуется на схемном языке каким-либо «типовым» способом

Отдельные детали соответствия схем и автоматов встречались ранее в курсе, и чтобы поставить это соответствие, достаточно вспомнить и соединить все эти детали

# Схема $\to$ автомат: состояния

$\Sigma$: 


$\mathcal{A}$: 


Состояние триггера в каждый момент времени[1] — это булево значение

Состояние регистра ширины $k$ в каждый момент времени — это набор из $k$ булевых значений, который можно трактовать и как число диапазона $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ в $k$-разрядной двоичной записи

Состояние схемы в каждый момент времени — это набор состояний элементов её последовательной части

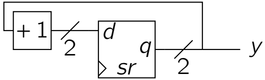
**Например,** множество состоянй схемы $\Sigma$ — это $\{0, 1, 2, 3\}$ (в двух разрядах)

Состояния автомата, соответствующего схеме, — это состояния схемы

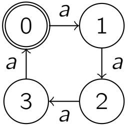
1 Если не считать переходных и некорректных состояний

# Схема $\to$ автомат: начальное состояние

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:



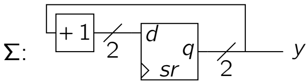

В результате сброса (синхронного или асинхронного) в элементах последовательной части схемы устанавливаются предзаданные состояния

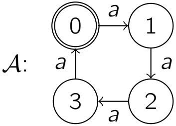
Другими словами, в результате сброса
в схеме устанавливается предзаданное состояние $q_0$

Начальное состояние автомата,
соответствующего схеме со сбросом, — $q_0$

**Например,** начальное состояние автомата, соответствующего $\Sigma$ — 0

# Схема → автомат: входной алфавит




$[x_1/v_1, x_2/v_2, \ldots, x_n/v_n]$ — набор значений $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в соответствующих точках схемы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в заданный момент времени: значение в каждой $k$-разрядной точке — это

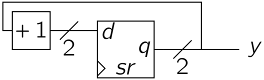
- набор из $k$ булевых значений или
- соответствующее число диапазона $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$

Входной алфавит автомата, соответствующего схеме со входами $x_1, \ldots, x_n$ (*кроме тактового и сброса*) — это множество всех наборов значений на входах $x_1, \ldots, x_n$

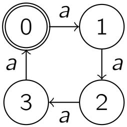
**Например,** в $\Sigma$ нет ни одного входа, и входной алфавит соответствующего автомата — $\{a\}$, где $a = []$

# Схема $\to$ автомат: выходной алфавит

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:



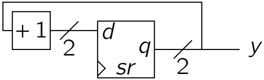

Выходной алфавит автомата, соответствующего схеме с выходами $y_1, \ldots, y_n$, — это множество всех наборов значений на этих выходах

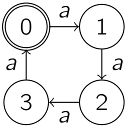
**Например,**

- Диапазон значений выходной шины $y$ схемы $\Sigma$ — $\{0, 1, 2, 3\}$
- Выходной алфавит соответствующего автомата:

$$\{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$$

# Схема → автомат: функция выхода

$\Sigma$: 


$\mathcal{A}$: 


Если значения на выходах схемы в каждый момент времени **однозначно** определяются её состоянием, то функцию выхода $B$ соответствующего автомата можно задать так:

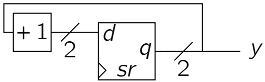
$B(q)$ — это набор значений на выходах схемы, находящейся в состоянии $q$

**Например,** для $\Sigma$
с учётом всех предыдущих построений верно следующее:

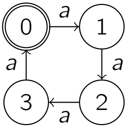
$$B(q) = [y/q]$$

# Схема $\to$ автомат: функция переходов

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:




Для синхронной схемы, находящейся в состоянии $q$,
и каждого набора значений $a$ на входах этой схемы
**однозначно** определено состояние $q'$, в которое переходит схема
в момент переднего фронта тактового сигнала

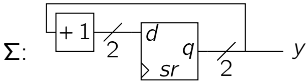
Для такой схемы можно задать функцию переходов $T$
соответствующего автомата следующим образом:

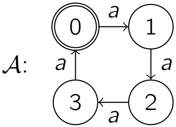
$$T(q, a) = q'$$

**Например,** для схемы $\Sigma$: *(с учётом всего сказанного ранее)*

$$T(0, []) = 1 \qquad T(2, []) = 3$$
$$T(1, []) = 2 \qquad T(3, []) = 0$$

# Схема → автомат: итог




Ограничения на устройство схемы,
упомянутые ранее при обсуждении соответствия её автомату:

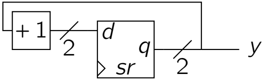
1. Синхронность
2. Наличие сброса (синхронного или асинхронного)
3. Существенная зависимость значений на выходах **только** от состояния схемы

**Итог:** если схема удовлетворяет трём ограничениям выше,
то ей соответствует автомат,
наглядно и полностью описывающий поведение этой схемы

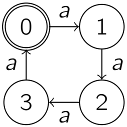
**В частности,** автомат $\mathcal{A}$ соответствует схеме $\Sigma$
и полностью описывает поведение этой схемы (*если* $a = []$)

# Автомат $\to$ схема: входы и выходы

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:



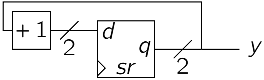

Рассмотрим автомат $(Q, q_0, B, T)$
над входным алфавитом $I$ и выходным алфавитом $O$

Покажем, как реализовать этот автомат
синхронной схемой со сбросом, содержащей

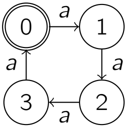
- входы $x_1, \ldots, x_n$, не считая тактового входа и входа сброса
- выходы $y_1, \ldots, y_m$

# Автомат → схема: входы и выходы

Σ:




$\mathcal{A}$:




Чтобы говорить о «разумной» реализации этого автомата схемой, следует уточнить устройство алфавитов $I$, $O$:[1]

- $I$ — множество всевозможных значений в точках $x_1, \ldots, x_n$
- $O$ — множество всевозможных значений в точках $y_1, \ldots, y_n$

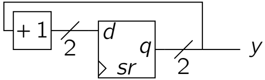
**Например,** для автомата $\mathcal{A}$ можно положить, что:

- $I = \{a\} = \{[]\}$
- $O = \{0, 1, 2, 3\} = \{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$ и выходной символ в $\mathcal{A}$ — это значение выхода $y$ в $\Sigma$

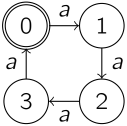
1 Можно уточнять эти алфавиты и другими способами, но не будем вводить ненужные технические детали

# Автомат → схема: типовое устройство схемы

$\Sigma$:

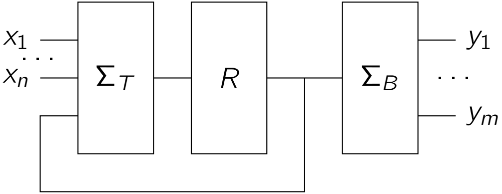



$\mathcal{A}$:

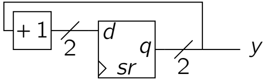


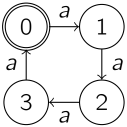

Схема, реализующая автомат *типовым способом*, содержит:

- параллельный регистр $R$, хранящий состояние автомата
- комбинационную схему $\Sigma_B$, реализующую функцию выхода
- комбинационную схему $\Sigma_T$, реализующую функцию переходов



# Автомат $\to$ схема: регистр состояния

$\Sigma$: 


$\mathcal{A}$: 


Выберем произвольную ширину $k$ регистра $R$, такую что $2^k \geq |Q|$

Произвольно отобразим каждое состояние автомата $q$ в состояние регистра $\varphi(q)$ так, чтобы было верно следующее:

- $\varphi(q_0) = 0$ [1]
- для остальных состояний $q$ чи́сла $\varphi(q)$ попарно различны и принадлежат диапазону $\{1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$

**Например,** для автомата $\mathcal{A}$ можно выбрать ширину $k = 2$ и отобразить состояния так:

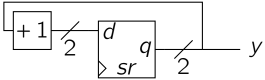
$\varphi(\text{левое верхнее}) = 0$ $\qquad$ $\varphi(\text{правое верхнее}) = 1$

$\varphi(\text{левое нижнее}) = 3$ $\qquad$ $\varphi(\text{правое нижнее}) = 2$

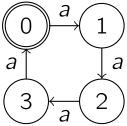
1 Можно выбрать и любое другое число $i$ для начального состояния: достаточно выбрать параллельный регистр, при сбросе сохраняющий это число

# Автомат → схема: функция выхода

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:




Рассмотрим **частично определённую** функцию

$$B_1 : \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\} \to O,$$

заданную так: $B_1(k) = B(\varphi^{-1}(k))$

Произвольно **доопределим** $B_1$ до функции $B_2$

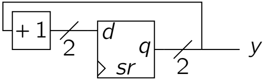
$\Sigma_B$ — произвольная комбинационная схема, реализующая функцию $B_2$

**Например,** для автомата $\mathcal{A}$

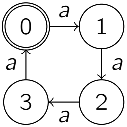
- функция $B_1$ всюду определена и задаётся равенством $B_1(k) = k$
- $\Sigma_B$ — тривиальная схема, реализующая тождественную функцию

# Автомат $\to$ схема: функция переходов

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:




Рассмотрим **частично определённую** функцию

$$T_1 : \{0, 1, \dots, 2^k - 1\} \times I \to \{0, 1, \dots, 2^k - 1\},$$

заданную так: $T_1(k, x) = T(\varphi^{-1}(k), x)$

Произвольно **доопределим** $T_1$ до функции $T_2$

$\Sigma_T$ — произвольная комбинационная схема, реализующая функцию $T_2$

**Например,** для автомата $\mathcal{A}$

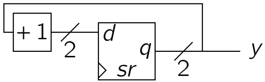
- функция $T_1$ всюду определена и задаётся так:

  $$T_1(0, []) = 1 \qquad T_1(2, []) = 3$$
  $$T_1(1, []) = 2 \qquad T_1(3, []) = 0$$

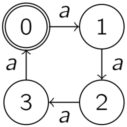
- $\Sigma_T$ — любая схема, реализующая $T_1$;
  например, состоящая из арифметического вентиля схемы $\Sigma$

# Автомат → схема: итог

$\Sigma$:



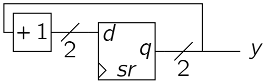

$\mathcal{A}$:

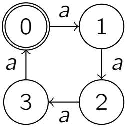



**Итог:** схемой, построенной по автомату обозначенным способом, реализуется поведение этого автомата
в схемной трактовке дискретного времени

**В частности,** автомат $\mathcal{A}$ реализуется схемой $\Sigma$

# Автомат $\to$ схема: итог

$\Sigma$: 

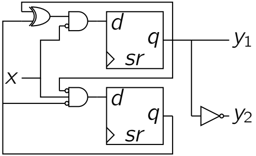

$\mathcal{A}$: 


Замечание: в общем случае автомат $\mathcal{A}$, реализованный схемой $\Sigma$, и автомат $\mathcal{A}'$, соответствующий схеме $\Sigma$, — **это разные автоматы**:

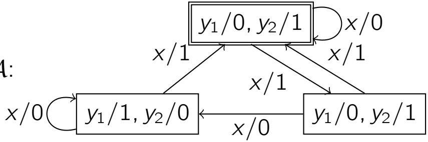
- состояния $\mathcal{A}'$ — чи́сла, а состояния $\mathcal{A}$ могут и не быть числами
- в автомате $\mathcal{A}'$ может содержаться **строго больше** состояний, чем в автомате $\mathcal{A}$
  - если вдуматься во все отображения и построения, то можно легко заметить, что «лишние» состояния **недостижимы** в $\mathcal{A}'$ из начального состояния

# Пример напоследок

$\Sigma$:




$\mathcal{A}$:




Автомат $\mathcal{A}$ реализуется схемой $\Sigma$ и соответствует схеме $\Sigma$
(*с поправкой на только что высказанное замечание*)

Выполнение $\mathcal{A}$: (*состояния по часовой стрелке:* $q_0$, $q_1$, $q_2$)

| $t$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | | 0 | | 1 | | 0 | | 0 | | 1 | ... |
| $q(t)$ | $q_0$ | $\to$ | $q_0$ | $\to$ | $q_1$ | $\to$ | $q_2$ | $\to$ | $q_2$ | $\to$ | $q_0$ ... |
| $y_1(t)y_2(t)$ | 01 | | 01 | | 01 | | 10 | | 10 | | 01 ... |

Соответствующее выполнение $\Sigma$: