Языки описания схем

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Языки описания схем

Блок 26

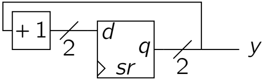
Соответствие между автоматами и схемами

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

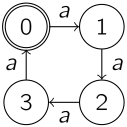
ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Σ:



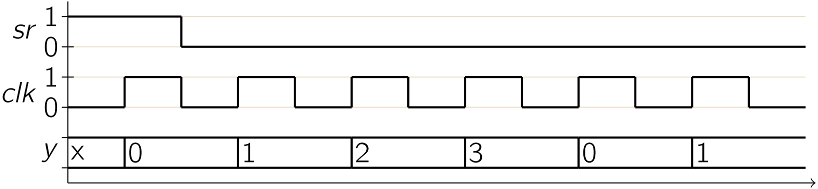
$\mathcal{A}$:



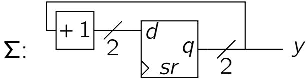
Выполнение $\mathcal{A}$:

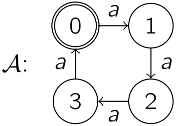
t	1	2	3	4	5	...
$x(t)$	a	a	a	a	a	...
$q(t)$	$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$	$q_2 \rightarrow$	$q_3 \rightarrow$	$q_0 \rightarrow$	q_1 ...
$y(t)$	0	1	2	3	0	1 ...

Выполнение Σ:



Вступление





Любой автомат может быть реализован в виде синхронной схемы

Многие синхронные схемы со сбросом являются автоматами

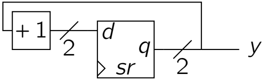
На этих двух тезисах основывается «умная» разработка схем, согласно которой

- схема или её часть проектируется как автомат, и
- разработанный автомат реализуется на схемном языке каким-либо «типовым» способом

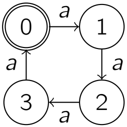
Отдельные детали соответствия схем и автоматов встречались ранее в курсе, и чтобы поставить это соответствие, достаточно вспомнить и соединить все эти детали

Схема $\to$ автомат: состояния

Σ:



$\mathcal{A}$:



Состояние триггера в каждый момент времени[1] — это булево значение

Состояние регистра ширины k в каждый момент времени — это набор из k булевых значений, который можно трактовать и как число диапазона $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ в k-разрядной двоичной записи

Состояние схемы в каждый момент времени — это набор состояний элементов её последовательной части

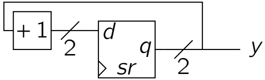
Например, множество состоянй схемы Σ — это $\{0, 1, 2, 3\}$ (в двух разрядах)

Состояния автомата, соответствующего схеме, — это состояния схемы

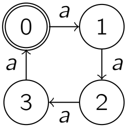
1 Если не считать переходных и некорректных состояний

Схема $\rightarrow$ автомат: начальное состояние

Σ:



$\mathcal{A}$:



В результате сброса (синхронного или асинхронного) в элементах последовательной части схемы устанавливаются предзаданные состояния

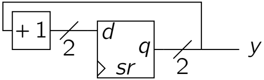
Другими словами, в результате сброса
в схеме устанавливается предзаданное состояние q_0

Начальное состояние автомата,
соответствующего схеме со сбросом, — q_0

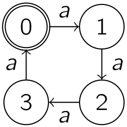
Например, начальное состояние автомата, соответствующего Σ — 0

Схема $\to$ автомат: входной алфавит

Σ:



$\mathcal{A}$:



$[x_1/v_1, x_2/v_2, \ldots, x_n/v_n]$ — набор значений $v_1, v_2, \ldots, v_n$
в соответствующих точках схемы $x_1, x_2, \ldots, x_n$
в заданный момент времени: значение в каждой k-разрядной точке — это

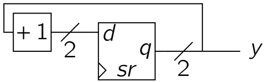
- набор из k булевых значений или
- соответствующее число диапазона $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$

Входной алфавит автомата, соответствующего схеме
со входами $x_1, \ldots, x_n$ (*кроме тактового и сброса*) —
это множество всех наборов значений на входах $x_1, \ldots, x_n$

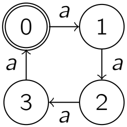
Например, в Σ нет ни одного входа,
и входной алфавит соответствующего автомата — $\{a\}$, где $a = []$

Схема $\to$ автомат: выходной алфавит

Σ:



$\mathcal{A}$:



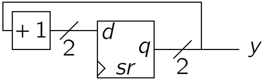
Выходной алфавит автомата, соответствующего схеме с выходами $y_1, \ldots, y_n$, — это множество всех наборов значений на этих выходах

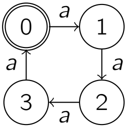
Например,

- Диапазон значений выходной шины y схемы Σ — $\{0, 1, 2, 3\}$
- Выходной алфавит соответствующего автомата:

$$\{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$$

Схема $\rightarrow$ автомат: функция выхода

Σ: 

$\mathcal{A}$: 

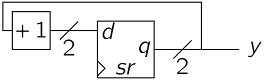
Если значения на выходах схемы в каждый момент времени **однозначно** определяются её состоянием, то функцию выхода B соответствующего автомата можно задать так:

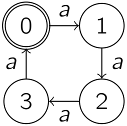
$B(q)$ — это набор значений на выходах схемы,
находящейся в состоянии q

Например, для Σ
с учётом всех предыдущих построений верно следующее:

$$B(q) = [y/q]$$

Схема $\to$ автомат: функция переходов

Σ: 

$\mathcal{A}$: 

Для синхронной схемы, находящейся в состоянии q, и каждого набора значений a на входах этой схемы **однозначно** определено состояние q', в которое переходит схема в момент переднего фронта тактового сигнала

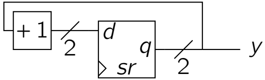
Для такой схемы можно задать функцию переходов T соответствующего автомата следующим образом:

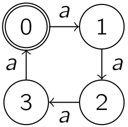
$$T(q, a) = q'$$

Например, для схемы Σ: (*с учётом всего сказанного ранее*)

$$T(0, []) = 1 \qquad T(2, []) = 3$$
$$T(1, []) = 2 \qquad T(3, []) = 0$$

Схема $\to$ автомат: итог

Σ: 

$\mathcal{A}$: 

Ограничения на устройство схемы,
упомянутые ранее при обсуждении соответствия её автомату:

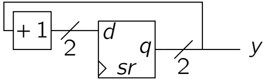
1. Синхронность
2. Наличие сброса (синхронного или асинхронного)
3. Существенная зависимость значений на выходах **только** от состояния схемы

Итог: если схема удовлетворяет трём ограничениям выше,
то ей соответствует автомат,
наглядно и полностью описывающий поведение этой схемы

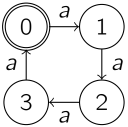
В частности, автомат $\mathcal{A}$ соответствует схеме Σ
и полностью описывает поведение этой схемы (*если* $a = []$)

Автомат → схема: входы и выходы

Σ:



$\mathcal{A}$:



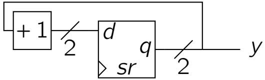
Рассмотрим автомат (Q, q_0, B, T)
над входным алфавитом I и выходным алфавитом O

Покажем, как реализовать этот автомат
синхронной схемой со сбросом, содержащей

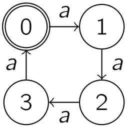
- входы $x_1, \dots, x_n$, не считая тактового входа и входа сброса
- выходы $y_1, \dots, y_m$

Автомат → схема: входы и выходы

Σ:



$\mathcal{A}$:



Чтобы говорить о «разумной» реализации этого автомата схемой, следует уточнить устройство алфавитов I, O:[1]

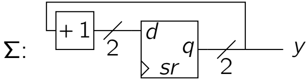
- I — множество всевозможных значений в точках $x_1, \ldots, x_n$
- O — множество всевозможных значений в точках $y_1, \ldots, y_n$

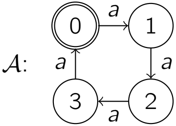
Например, для автомата $\mathcal{A}$ можно положить, что:

- $I = \{a\} = \{[]\}$
- $O = \{0, 1, 2, 3\} = \{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$ и выходной символ в $\mathcal{A}$ — это значение выхода y в Σ

1 Можно уточнять эти алфавиты и другими способами, но не будем вводить ненужные технические детали

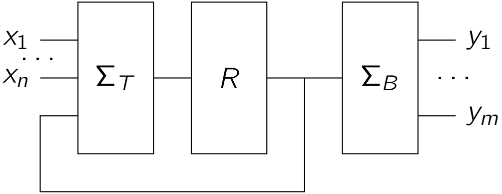
Автомат → схема: типовое устройство схемы





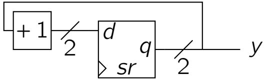
Схема, реализующая автомат *типовым способом*, содержит:

- параллельный регистр R, хранящий состояние автомата
- комбинационную схему Σ_B, реализующую функцию выхода
- комбинационную схему Σ_T, реализующую функцию переходов

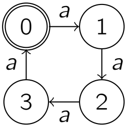


Автомат $\to$ схема: регистр состояния

Σ:



$\mathcal{A}$:



Выберем произвольную ширину k регистра R, такую что $2^k \geq |Q|$

Произвольно отобразим каждое состояние автомата q в состояние регистра $\varphi(q)$ так, чтобы было верно следующее:

- $\varphi(q_0) = 0$ [1]
- для остальных состояний q чи́сла $\varphi(q)$ попарно различны и принадлежат диапазону $\{1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$

Например, для автомата $\mathcal{A}$ можно выбрать ширину $k = 2$ и отобразить состояния так:

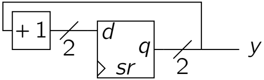
$\varphi(\text{левое верхнее}) = 0$ $\qquad$ $\varphi(\text{правое верхнее}) = 1$

$\varphi(\text{левое нижнее}) = 3$ $\qquad$ $\varphi(\text{правое нижнее}) = 2$

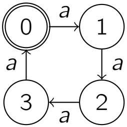
1 Можно выбрать и любое другое число i для начального состояния: достаточно выбрать параллельный регистр, при сбросе сохраняющий это число

Автомат → схема: функция выхода

Σ:



$\mathcal{A}$:



Рассмотрим **частично определённую** функцию

$$B_1 : \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\} \to O,$$

заданную так: $B_1(k) = B(\varphi^{-1}(k))$

Произвольно **доопределим** B_1 до функции B_2

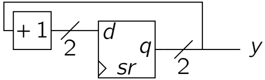
Σ_B — произвольная комбинационная схема, реализующая функцию B_2

Например, для автомата $\mathcal{A}$

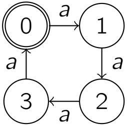
- функция B_1 всюду определена и задаётся равенством $B_1(k) = k$
- Σ_B — тривиальная схема, реализующая тождественную функцию

Автомат $\to$ схема: функция переходов

Σ:



$\mathcal{A}$:



Рассмотрим **частично определённую** функцию

$$T_1 : \{0, 1, \dots, 2^k - 1\} \times I \to \{0, 1, \dots, 2^k - 1\},$$

заданную так: $T_1(k, x) = T(\varphi^{-1}(k), x)$

Произвольно **доопределим** T_1 до функции T_2

Σ_T — произвольная комбинационная схема, реализующая функцию T_2

Например, для автомата $\mathcal{A}$

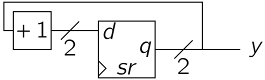
- функция T_1 всюду определена и задаётся так:

$$T_1(0, []) = 1 \qquad T_1(2, []) = 3$$
$$T_1(1, []) = 2 \qquad T_1(3, []) = 0$$

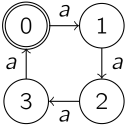
- Σ_T — любая схема, реализующая T_1;
  например, состоящая из арифметического вентиля схемы Σ

Автомат $\to$ схема: итог

Σ:



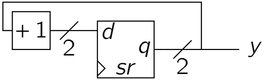
$\mathcal{A}$:

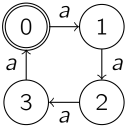


Итог: схемой, построенной по автомату обозначенным способом, реализуется поведение этого автомата
в схемной трактовке дискретного времени

В частности, автомат $\mathcal{A}$ реализуется схемой Σ

Автомат $\to$ схема: итог

Σ: 

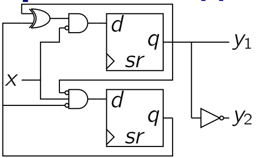
$\mathcal{A}$: 

Замечание: в общем случае автомат $\mathcal{A}$, реализованный схемой Σ, и автомат $\mathcal{A}'$, соответствующий схеме Σ, — **это разные автоматы**:

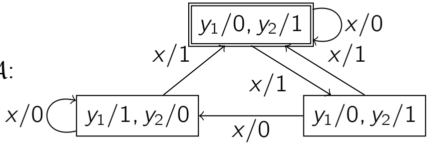
- состояния $\mathcal{A}'$ — чи́сла, а состояния $\mathcal{A}$ могут и не быть числами
- в автомате $\mathcal{A}'$ может содержаться **строго больше** состояний, чем в автомате $\mathcal{A}$
  - если вдуматься во все отображения и построения, то можно легко заметить, что «лишние» состояния **недостижимы** в $\mathcal{A}'$ из начального состояния

Пример напоследок

Σ:



$\mathcal{A}$:



Автомат $\mathcal{A}$ реализуется схемой Σ и соответствует схеме Σ (*с поправкой на только что высказанное замечание*)

Выполнение $\mathcal{A}$: (*состояния по часовой стрелке:* q_0, q_1, q_2)

t	1		2		3		4		5		...
$x(t)$		0		1		0		0		1	...
$q(t)$	q_0	$\to$	q_0	$\to$	q_1	$\to$	q_2	$\to$	q_2	$\to$	q_0 ...
$y_1(t)y_2(t)$	01		01		01		10		10		01 ...

Соответствующее выполнение Σ: