

Языки описания схем

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Языки описания схем

Блок 26

Соответствие между автоматами и схемами

Лектор:

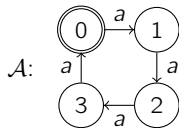
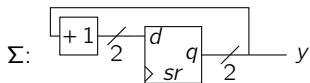
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

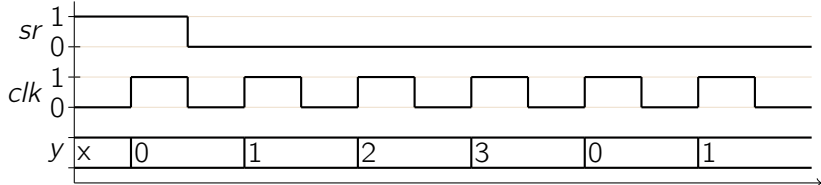
Вступление



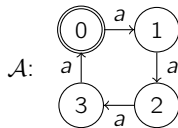
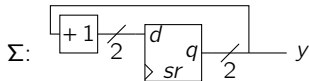
Выполнение \mathcal{A} :

t	1	2	3	4	5	...
$x(t)$	a	a	a	a	a	...
$q(t)$	$q_0 \rightarrow$	$q_1 \rightarrow$	$q_2 \rightarrow$	$q_3 \rightarrow$	$q_0 \rightarrow$	$q_1 \dots$
$y(t)$	0	1	2	3	0	1 ...

Выполнение Σ :



Вступление



Любой автомат может быть реализован в виде **синхронной** схемы

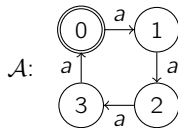
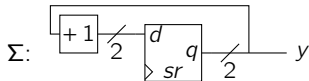
Многие **синхронные** схемы **со сбросом** являются автоматами

На этих двух тезисах основывается «умная» разработка схем, согласно которой

- ▶ схема или её часть проектируется как автомат, и
- ▶ разработанный автомат реализуется на схемном языке каким-либо «типовым» способом

Отдельные детали соответствия схем и автоматов встречались ранее в курсе, и чтобы поставить это соответствие, достаточно вспомнить и соединить все эти детали

Схема → автомат: состояния



Состояние триггера в каждый момент времени¹ — это булево значение

Состояние регистра ширины k в каждый момент времени — это набор из k булевых значений, который можно трактовать и как число диапазона $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ в k -разрядной двоичной записи

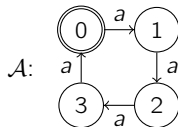
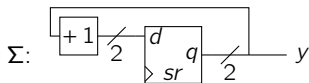
Состояние схемы в каждый момент времени — это набор состояний элементов её последовательной части

Например, множество состояний схемы Σ — это $\{0, 1, 2, 3\}$ (в двух разрядах)

Состояния автомата, соответствующего схеме, — это состояния схемы

¹ Если не считать переходных и некорректных состояний

Схема → автомат: начальное состояние



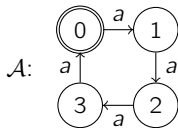
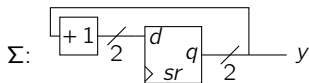
В результате сброса (синхронного или асинхронного) в элементах последовательной части схемы устанавливаются предзаданные состояния

Другими словами, в результате сброса в схеме устанавливается предзаданное состояние q_0

Начальное состояние автомата, соответствующего схеме со сбросом, — q_0

Например, начальное состояние автомата, соответствующего $\Sigma = 0$

Схема \rightarrow автомат: входной алфавит



$[x_1/v_1, x_2/v_2, \dots, x_n/v_n]$ — набор значений v_1, v_2, \dots, v_n

в соответствующих точках схемы x_1, x_2, \dots, x_n

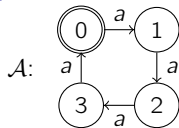
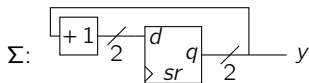
в заданный момент времени: значение в каждой k -разрядной точке — это

- ▶ набор из k булевых значений или
- ▶ соответствующее число диапазона $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$

Входной алфавит автомата, соответствующего схеме со входами x_1, \dots, x_n (кроме тактового и сброса) — это множество всех наборов значений на входах x_1, \dots, x_n

Например, в Σ нет ни одного входа, и входной алфавит соответствующего автомата — $\{a\}$, где $a = []$

Схема \rightarrow автомат: выходной алфавит

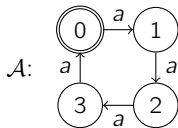
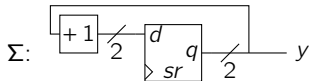


Выходной алфавит автомата, соответствующего схеме с выходами y_1, \dots, y_n , — это множество всех наборов значений на этих выходах

Например,

- ▶ Диапазон значений выходной шины y схемы Σ — $\{0, 1, 2, 3\}$
- ▶ Выходной алфавит соответствующего автомата:
 $\{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$

Схема → автомат: функция выхода



Если значения на выходах схемы в каждый момент времени **однозначно** определяются её состоянием, то функцию выхода B соответствующего автомата можно задать так:

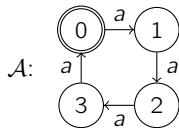
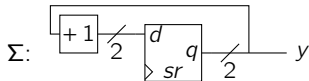
$B(q)$ — это набор значений на выходах схемы, находящейся в состоянии q

Например, для Σ

с учётом всех предыдущих построений верно следующее:

$$B(q) = [y/q]$$

Схема → автомат: функция переходов



Для **синхронной** схемы, находящейся в состоянии q , и каждого набора значений a на входах этой схемы **однозначно** определено состояние q' , в которое переходит схема в момент переднего фронта тактового сигнала

Для такой схемы можно задать функцию переходов T соответствующего автомата следующим образом:

$$T(q, a) = q'$$

Например, для схемы Σ :

$$T(0, []) = 1$$

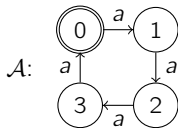
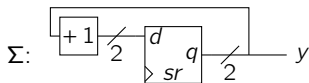
$$T(1, []) = 2$$

(с учётом всего сказанного ранее)

$$T(2, []) = 3$$

$$T(3, []) = 0$$

Схема \rightarrow автомат: итог



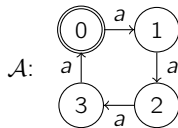
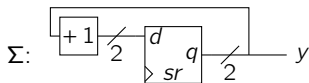
Ограничения на устройство схемы, упомянутые ранее при обсуждении соответствия её автомату:

1. Синхронность
2. Наличие сброса (синхронного или асинхронного)
3. Существенная зависимость значений на выходах **ТОЛЬКО** от состояния схемы

Итог: если схема удовлетворяет трём ограничениям выше, то ей соответствует автомат, наглядно и полностью описывающий поведение этой схемы

В частности, автомат \mathcal{A} соответствует схеме Σ и полностью описывает поведение этой схемы (если $a = []$)

Автомат → схема: входы и выходы



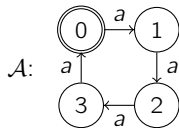
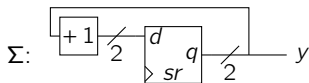
Рассмотрим автомат (Q, q_0, B, T)

над входным алфавитом I и выходным алфавитом O

Покажем, как реализовать этот автомат
синхронной схемой со сбросом, содержащей

- ▶ входы x_1, \dots, x_n , не считая тактового входа и входа сброса
- ▶ выходы y_1, \dots, y_m

Автомат \rightarrow схема: входы и выходы



Чтобы говорить о «разумной» реализации этого автомата схемой, следует уточнить устройство алфавитов I , O :¹

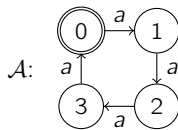
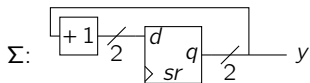
- ▶ I — множество всевозможных значений в точках x_1, \dots, x_n
- ▶ O — множество всевозможных значений в точках y_1, \dots, y_n

Например, для автомата \mathcal{A} можно положить, что:

- ▶ $I = \{a\} = \{[]\}$
- ▶ $O = \{0, 1, 2, 3\} = \{[y/0], [y/1], [y/2], [y/3]\}$ и выходной символ в \mathcal{A} — это значение выхода y в Σ

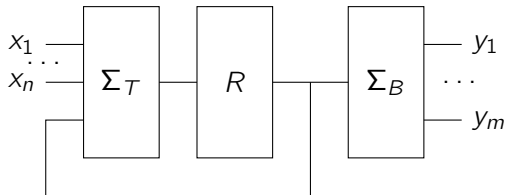
¹ Можно уточнять эти алфавиты и другими способами, но не будем вводить ненужные технические детали

Автомат → схема: типовое устройство схемы

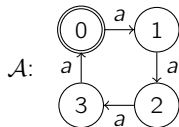
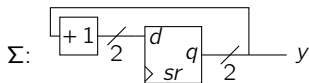


Схема, реализующая автомат *типовым способом*, содержит:

- ▶ параллельный регистр R , хранящий состояние автомата
- ▶ комбинационную схему Σ_B , реализующую функцию выхода
- ▶ комбинационную схему Σ_T , реализующую функцию переходов



Автомат \rightarrow схема: регистр состояния



Выберем произвольную ширину k регистра R , такую что $2^k \geq |Q|$

Произвольно отображим каждое состояние автомата q в состояние регистра $\varphi(q)$ так, чтобы было верно следующее:

- ▶ $\varphi(q_0) = 0$ ¹
- ▶ для остальных состояний q числа $\varphi(q)$ попарно различны и принадлежат диапазону $\{1, 2, \dots, 2^k - 1\}$

Например, для автомата \mathcal{A} можно выбрать ширину $k = 2$ и отобразить состояния так:

$$\varphi(\text{левое верхнее}) = 0$$

$$\varphi(\text{правое верхнее}) = 1$$

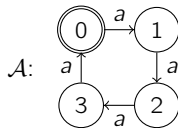
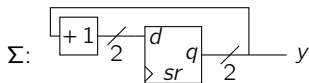
$$\varphi(\text{левое нижнее}) = 3$$

$$\varphi(\text{правое нижнее}) = 2$$

1 Можно выбрать и любое другое число i для начального состояния:

достаточно выбрать параллельный регистр, при сбросе сохраняющий это число

Автомат \rightarrow схема: функция выхода



Рассмотрим **частично определённую** функцию

$$B_1 : \{0, 1, \dots, 2^k - 1\} \rightarrow O,$$

заданную так: $B_1(k) = B(\varphi^{-1}(k))$

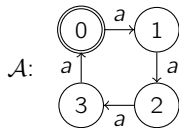
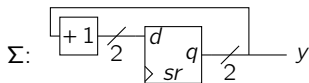
Произвольно **доопределим** B_1 до функции B_2

Σ_B — произвольная комбинационная схема, реализующая функцию B_2

Например, для автомата \mathcal{A}

- ▶ функция B_1 всюду определена и задаётся равенством $B_1(k) = k$
- ▶ Σ_B — тривиальная схема, реализующая тождественную функцию

Автомат \rightarrow схема: функция переходов



Рассмотрим **частично определённую** функцию

$$T_1 : \{0, 1, \dots, 2^k - 1\} \times I \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^k - 1\},$$

заданную так: $T_1(k, x) = T(\varphi^{-1}(k), x)$

Произвольно **доопределим** T_1 до функции T_2

Σ_T — произвольная комбинационная схема, реализующая функцию T_2

Например, для автомата \mathcal{A}

- ▶ функция T_1 всюду определена и задаётся так:

$$T_1(0, []) = 1$$

$$T_1(2, []) = 3$$

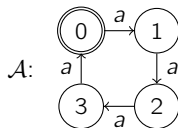
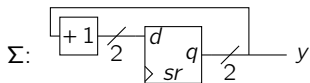
$$T_1(1, []) = 2$$

$$T_1(3, []) = 0$$

- ▶ Σ_T — любая схема, реализующая T_1 ;

например, состоящая из арифметического вентиля схемы Σ

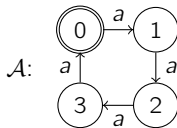
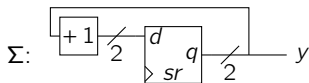
Автомат \rightarrow схема: итог



Итог: схемой, построенной по автомату обозначенным способом, реализуется поведение этого автомата
в схемной трактовке дискретного времени

В частности, автомат \mathcal{A} реализуется схемой Σ

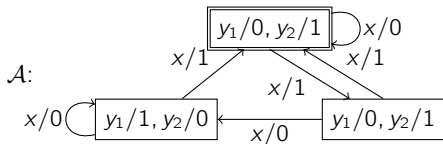
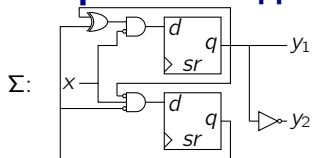
Автомат \rightarrow схема: итог



Замечание: в общем случае автомат \mathcal{A} , реализованный схемой Σ , и автомат \mathcal{A}' , соответствующий схеме Σ , — **это разные автоматы**:

- ▶ состояния \mathcal{A}' — числа, а состояния \mathcal{A} могут и не быть числами
- ▶ в автомате \mathcal{A}' может содержаться **строго больше** состояний, чем в автомате \mathcal{A}
 - ▶ если вдуматься во все отображения и построения, то можно легко заметить, что «лишние» состояния **недостижимы** в \mathcal{A}' из начального состояния

Пример напоследок



Автомат \mathcal{A} реализуется схемой Σ и соответствует схеме Σ
 (с поправкой на только что высказанное *замечание*)

Выполнение \mathcal{A} : (состояния по часовой стрелке: q_0, q_1, q_2)

t	1	2	3	4	5	...
$x(t)$	0	1	0	0	1	...
$q(t)$	$q_0 \rightarrow q_0$	$q_0 \rightarrow q_1$	$q_1 \rightarrow q_2$	$q_2 \rightarrow q_2$	$q_2 \rightarrow q_0$...
$y_1(t)y_2(t)$	01	01	01	10	10	01 ...

Соответствующее выполнение Σ :

