Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 23

Примеры волновых алгоритмов:
кольцевой алгоритм,
древесный алгоритм,
алгоритм эха

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Кольцевой алгоритм

Это централизованный волновой алгоритм, предназначенный для топологии кольца

Или для произвольной топологии, в которой выделено кольцо, проходящее через все узлы

В алгоритме достаточно будет отправлять сообщения по каналам только в одну сторону (*однонаправленное кольцо*)

В связи с этим полагается, что каждому узлу p известен узел $next_p$, следующий в кольце

Этот алгоритм устроен так: сообщение-маркер (фишка) **tok**

- отправляется в кольцо
- проходит полный круг и
- возвращается к исходному отправителю, после чего он принимает решение

Кольцевой алгоритм

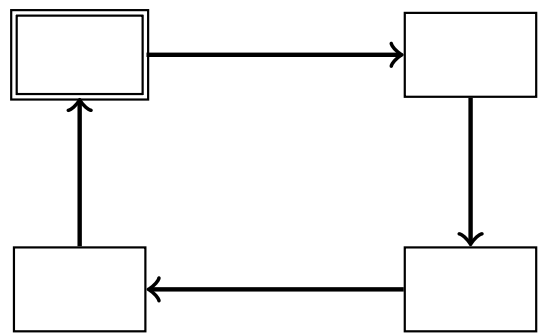
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

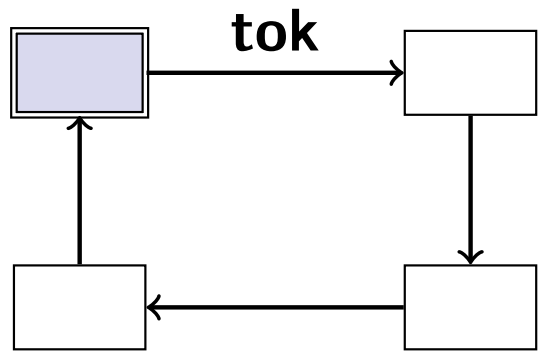
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

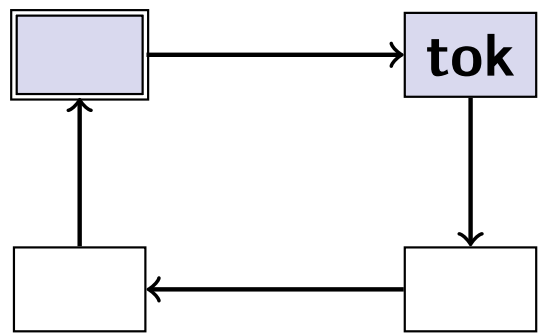
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

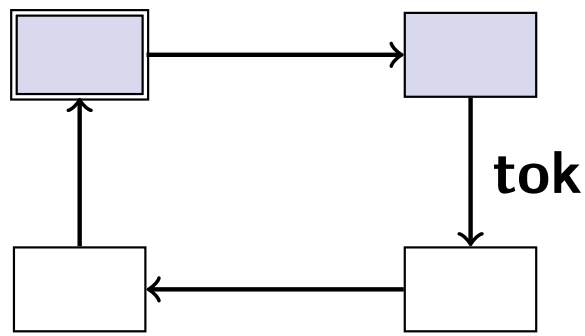
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

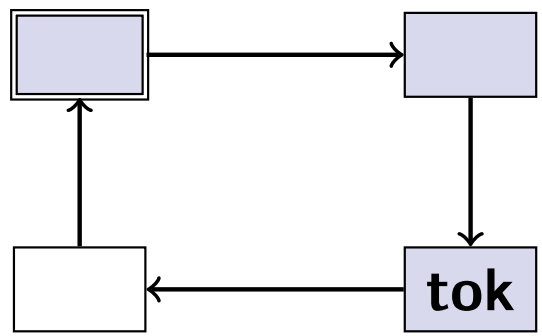
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

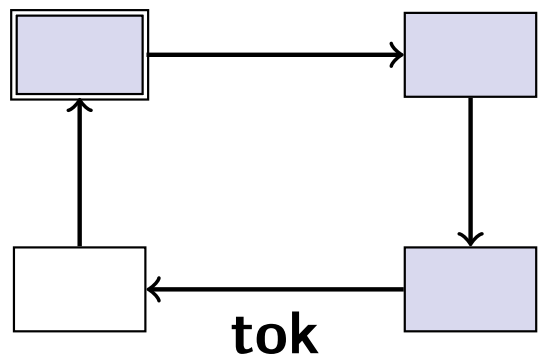
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

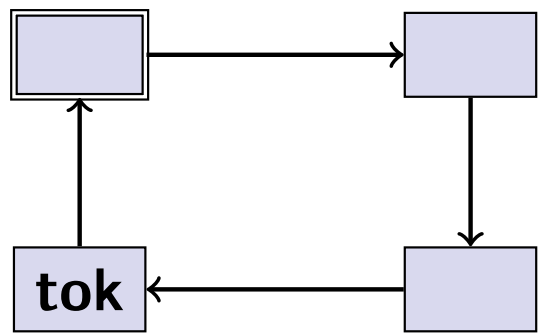
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

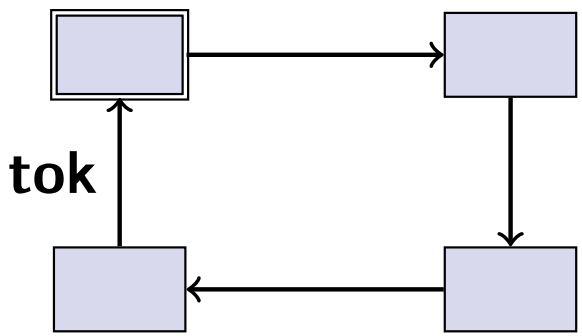
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

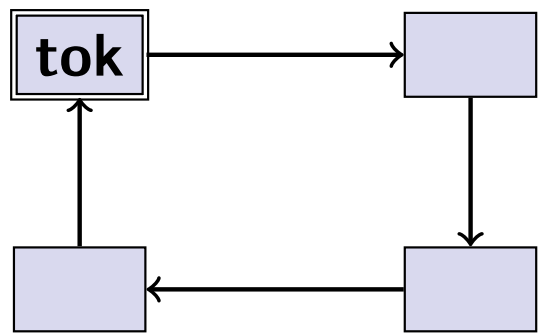
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

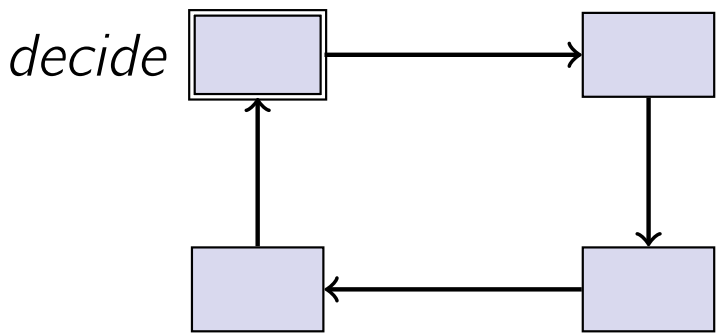
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Кольцевой алгоритм

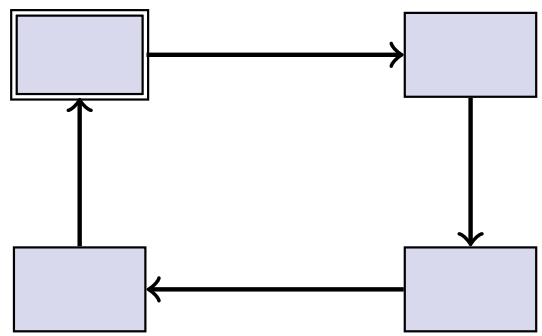
Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$
2. $receive(\mathbf{tok})$
3. $decide$

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok})$
2. $send(\mathbf{tok}) \to next_p$

Пример для четырёх узлов:



Утверждение (Задача 1). **Кольцевой алгоритм является волновым**

Древесный алгоритм

Этот волновой алгоритм предназначен для топологии (неориентированного некорневого) дерева

Или для произвольной топологии, в которой выделено остовное дерево

В связи с этим полагается, что каждому узлу p известно множество соседей $Neigh_p$ этого узла в дереве

Алгоритм устроен так:

1. Каждый лист отправляет фишку в единственный доступный ему канал
2. Каждая внутренняя вершина
   - 2.1 принимает фишки от всех соседей, кроме одного,
   - 2.2 отправляет фишку оставшемуся соседу и
   - 2.3 если получает фишку от оставшегося соседа, то принимает решение

Древесный алгоритм

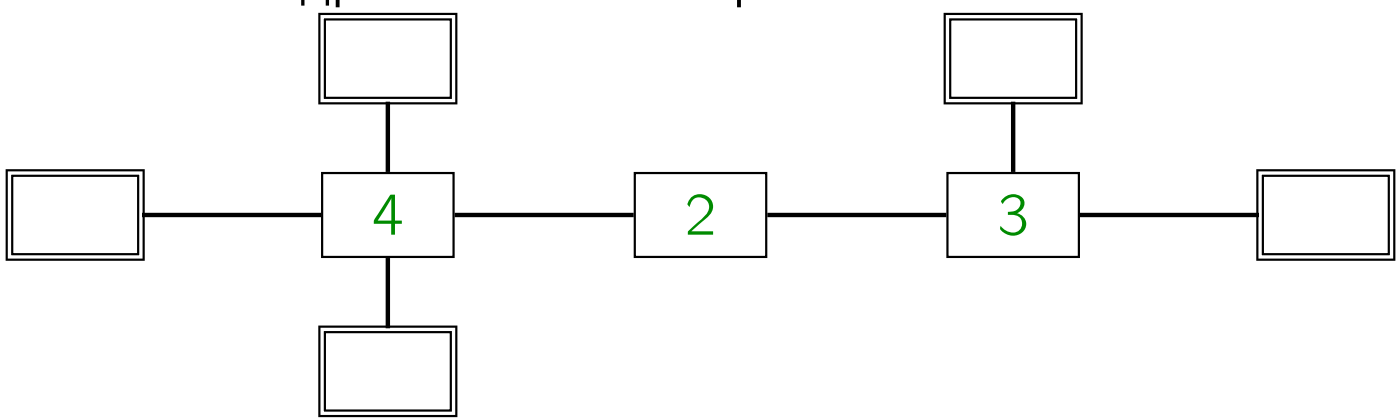
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

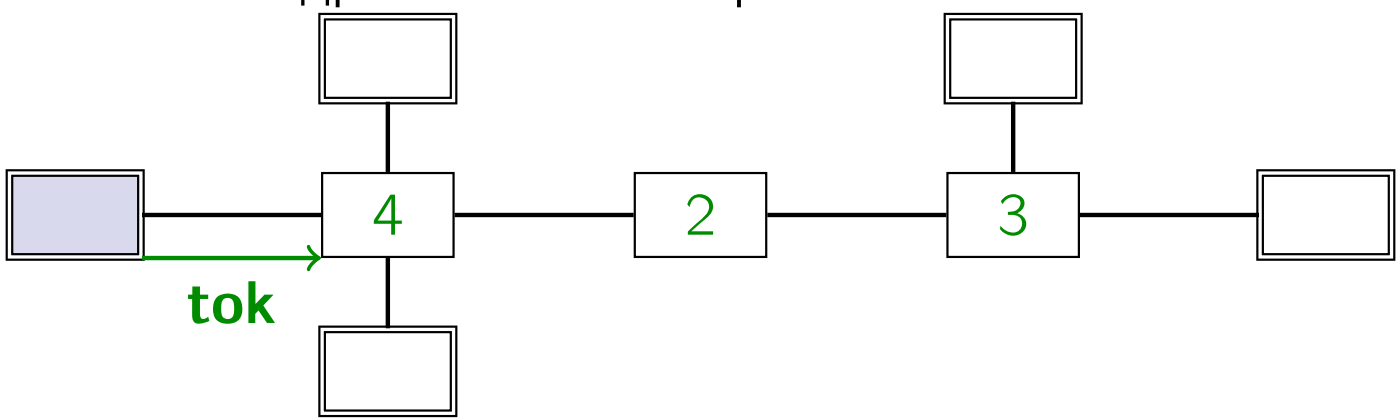
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

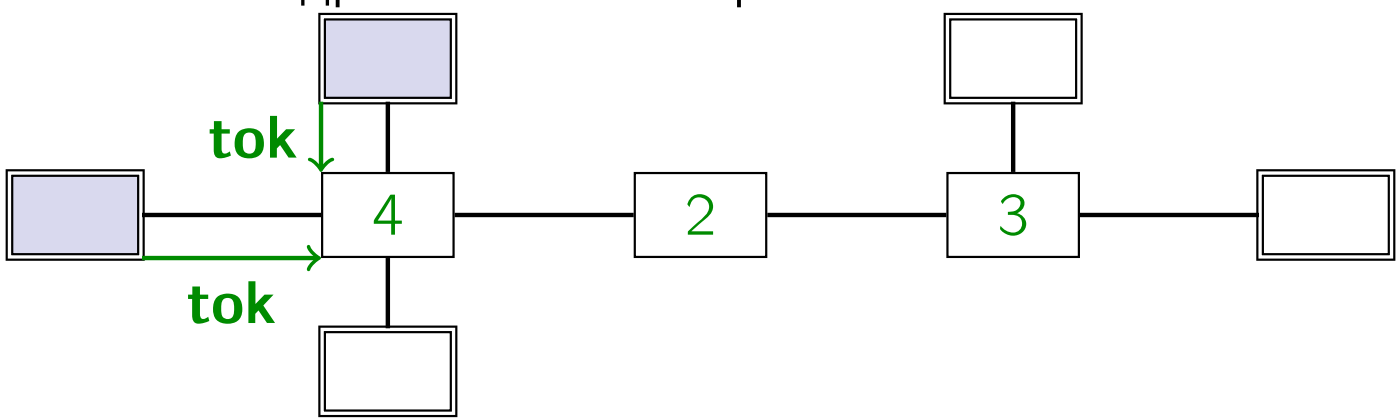
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

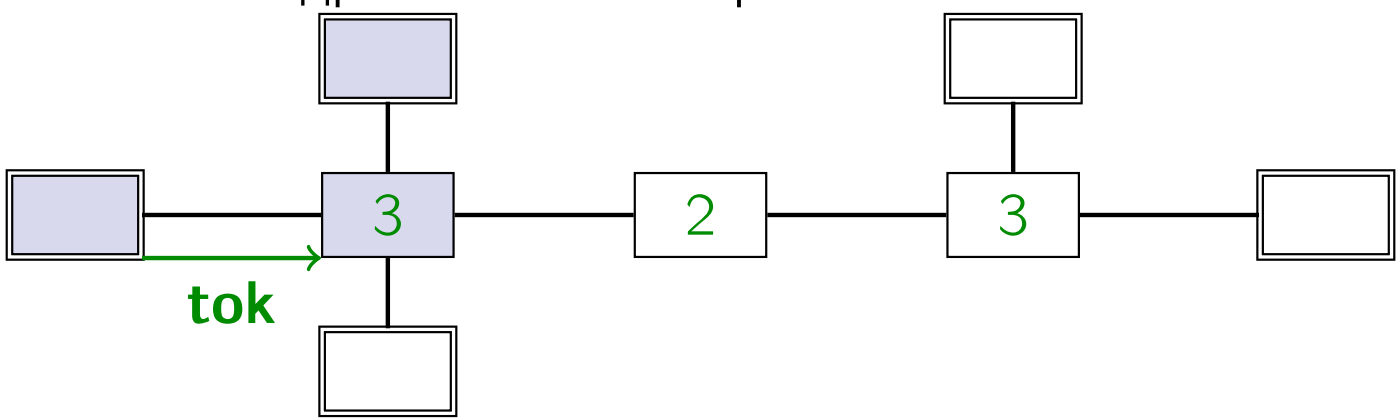
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

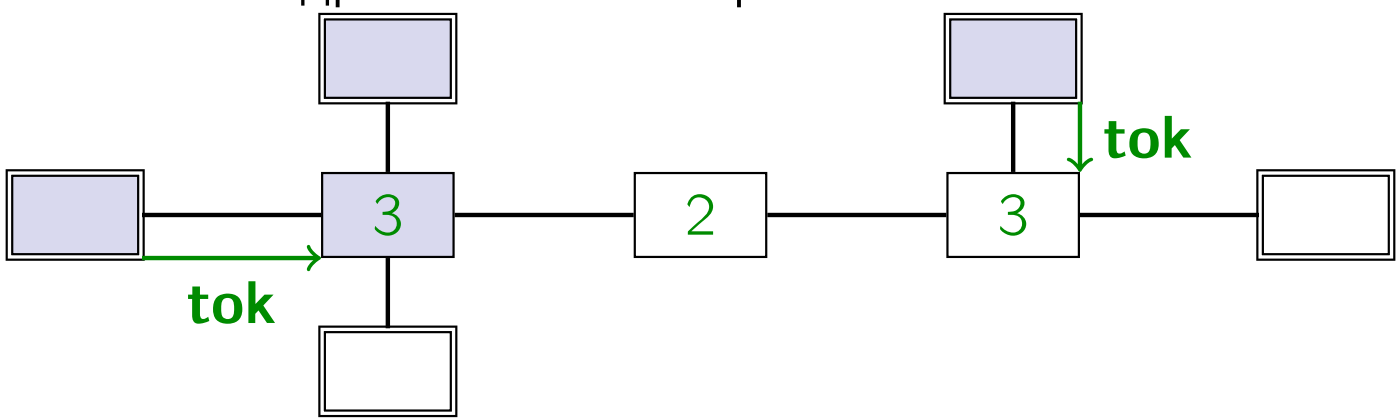
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

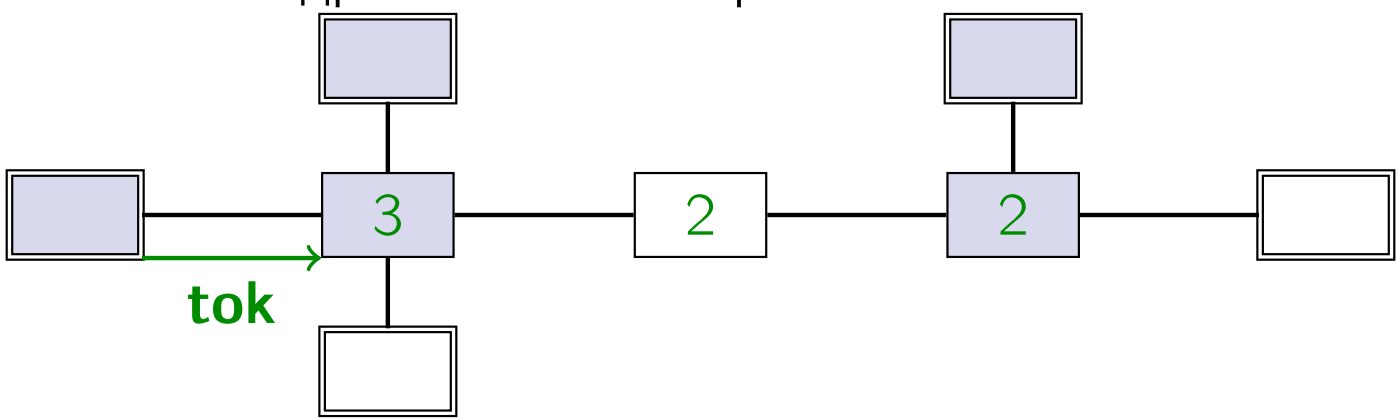
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

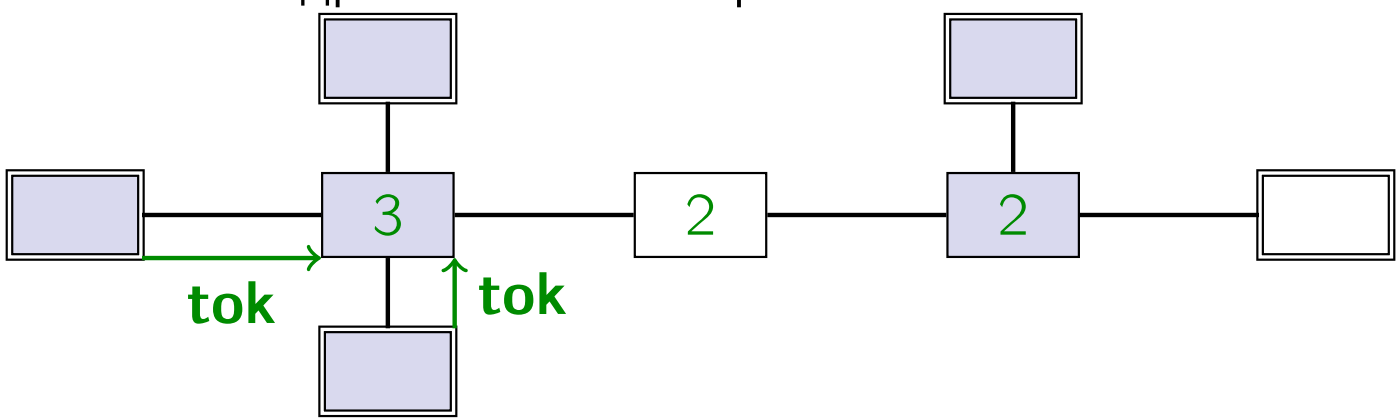
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

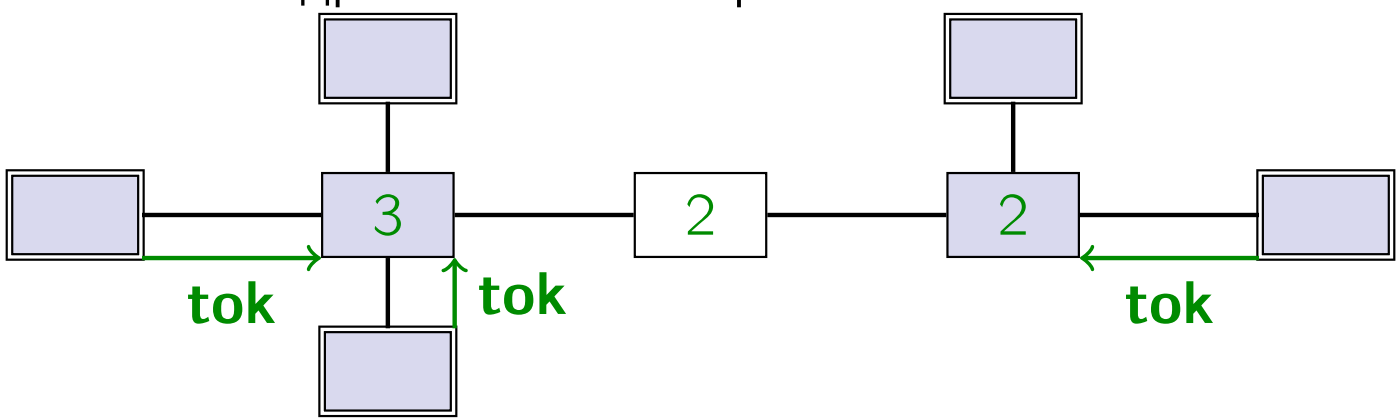
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

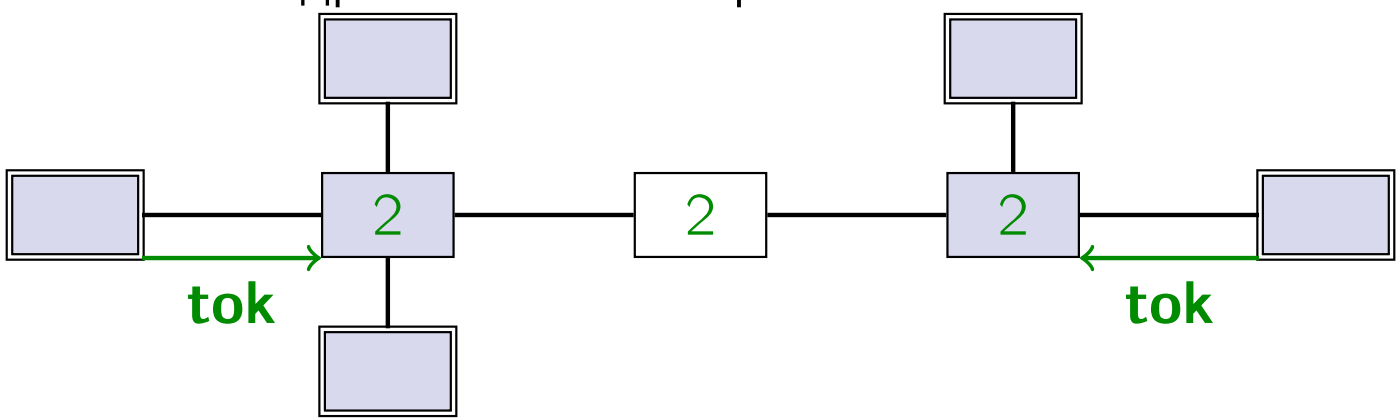
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

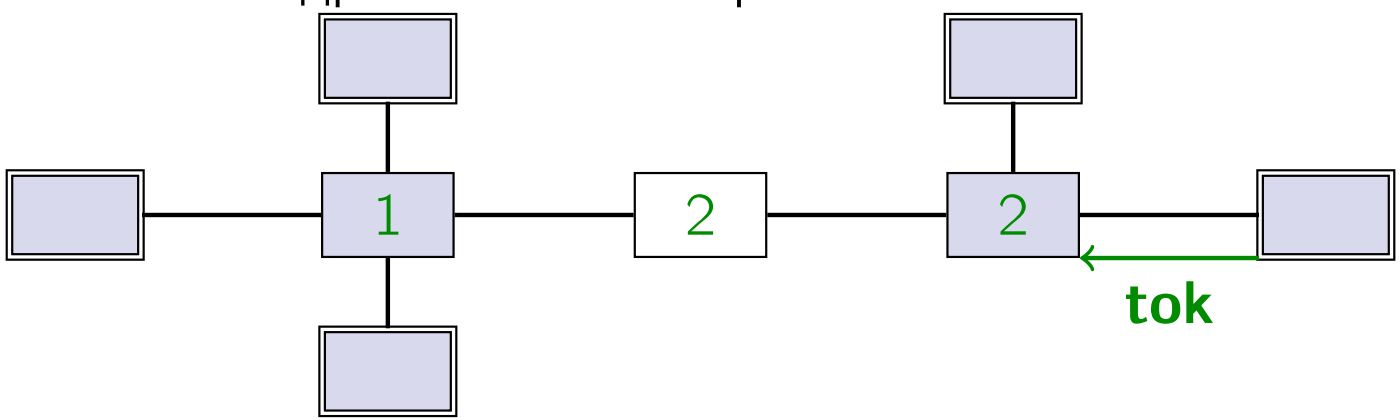
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

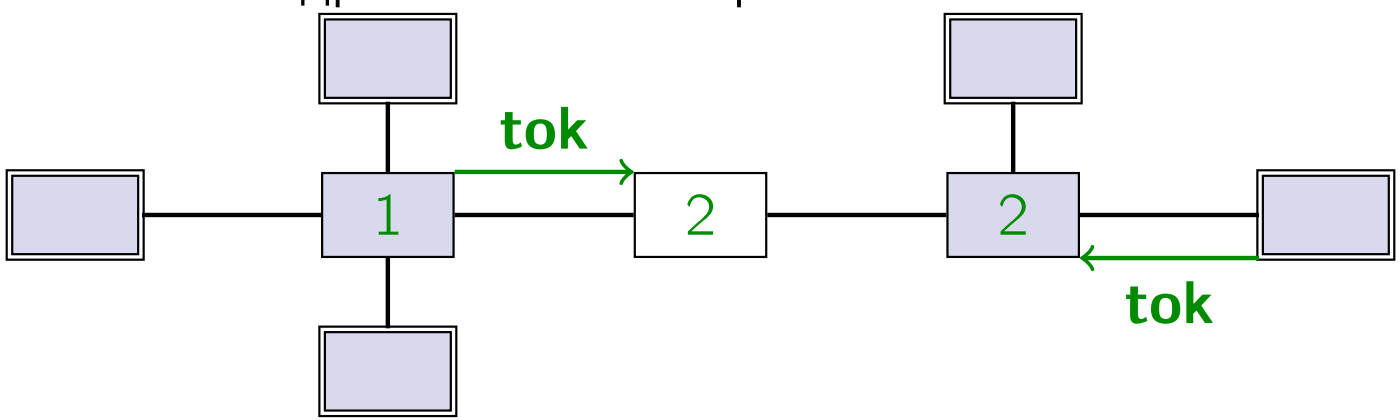
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

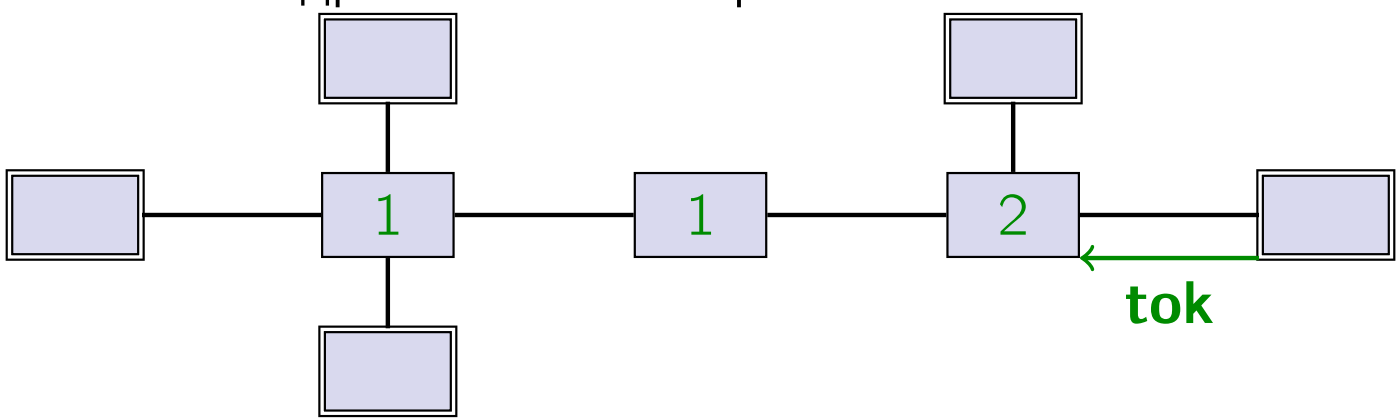
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

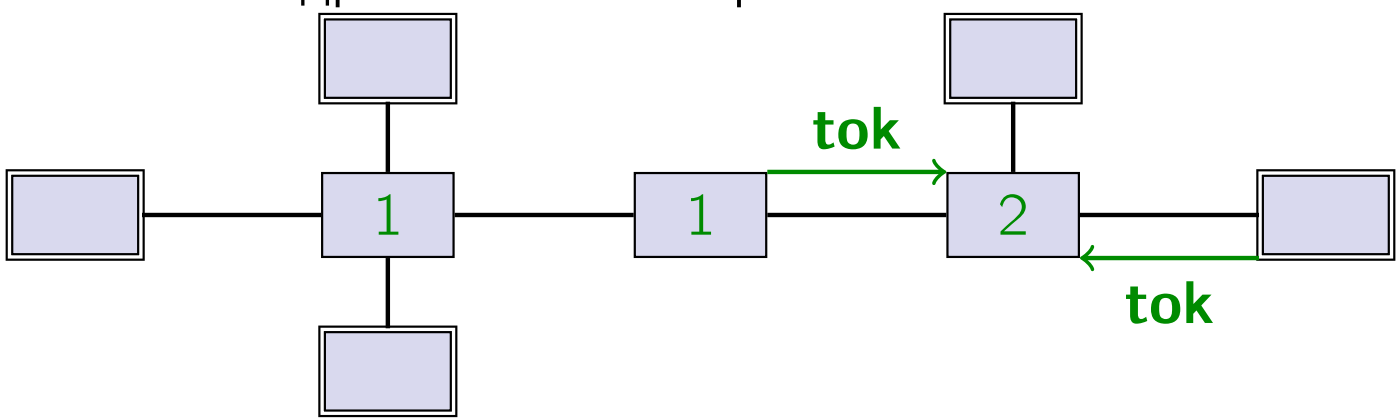
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

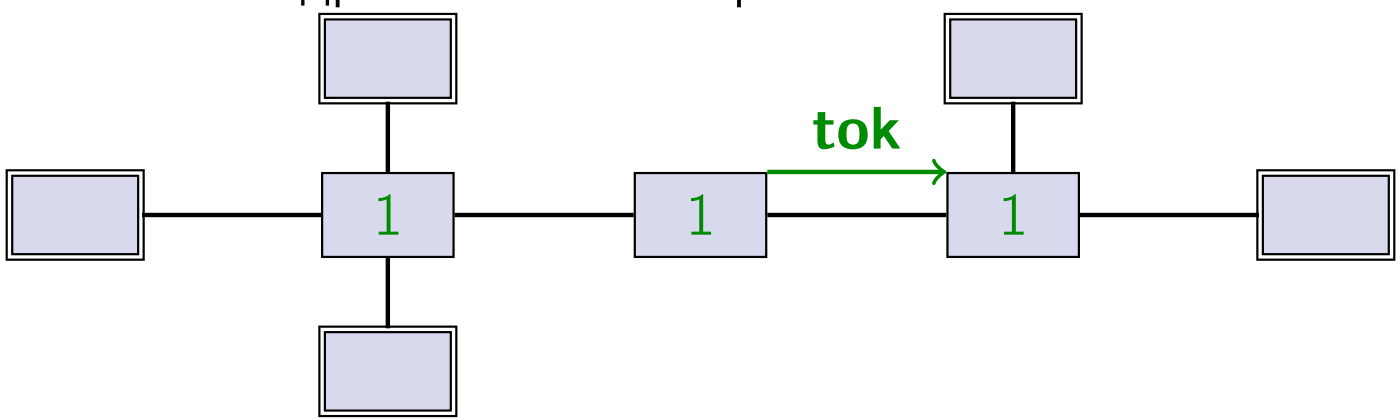
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

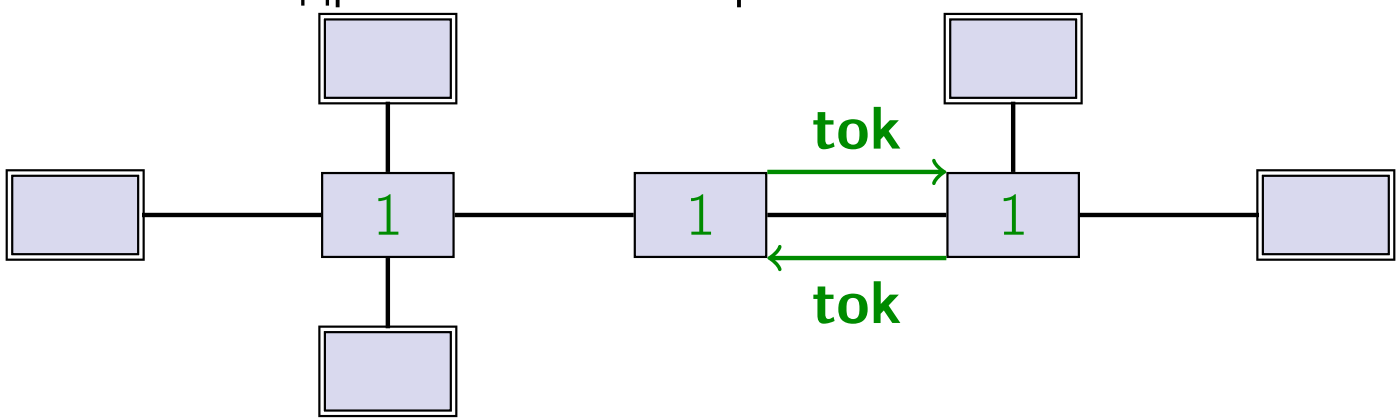
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

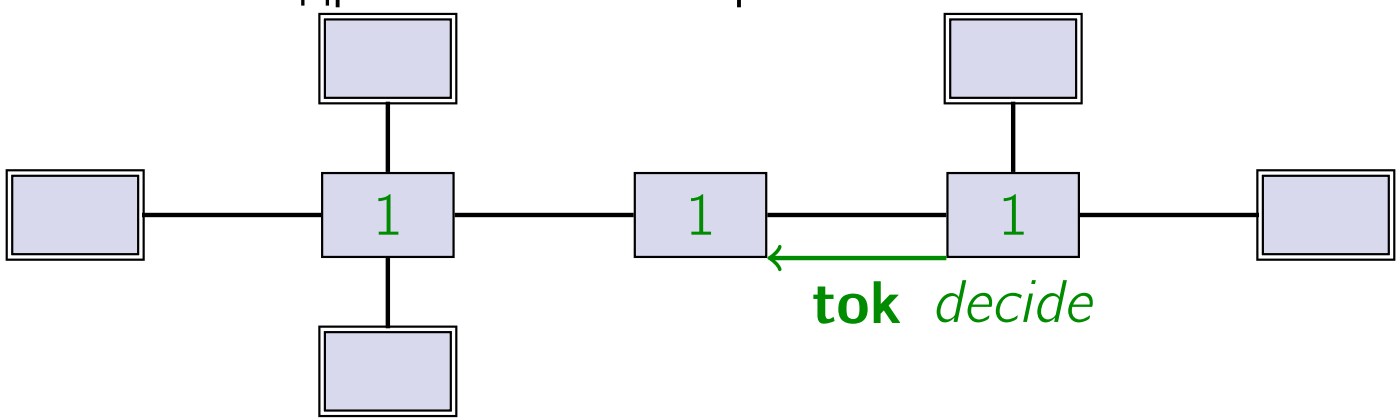
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

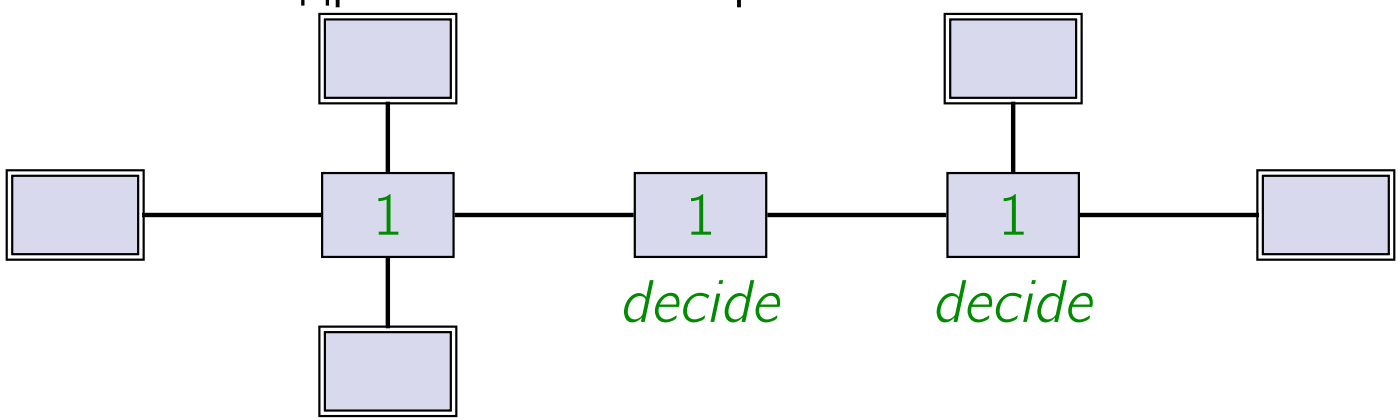
Код инициатора p:

1. *send*(**tok**) (*в единственный доступный канал*)

Код последователя p:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   - 2.1 *receive*(**tok**) $\leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   - 2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
3. Присвоить в q единственный элемент X_p
4. *send*(**tok**) $\rightarrow q$
5. *receive*(**tok**) $\leftarrow q$
6. *decide*

Пример выполнения древесного алгоритма



Древесный алгоритм

Утверждение. Древесный алгоритм для деревьев с хотя бы двумя внутренними узлами является волновым

Доказательство.

Завершаемость следует из того, что

- инициатор выполняет ровно одну команду,
- а последователь —
  - конечное число витков цикла (столько, сколько всего существует узлов),
  - в каждом витке выполняет 2 команды и
  - вне цикла выполняет 5 команд

Принятие решения можно обосновать так

Пусть V и E — множество всех вершин и всех рёбер дерева топологии соответственно

Древесный алгоритм

Доказательство.

Наблюдение 1: каждый узел отправляет не более одного сообщения

Наблюдение 2:

1. $X_p := Neigh_p$;
2. Пока $|X_p| > 1$:
   2.1 $receive(\mathbf{tok}) \leftarrow q$ для какого-либо $q \in X$
   2.2 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;

Перед началом выполнения цикла (2) и после каждого его витка $|X_p|$ — это количество соседей p, от которых сообщение ещё не принято:

- Перед началом $|X_p| = |Neigh_p|$ и сообщений нет от всех соседей
- После очередного витка количество соседей, от которых не получено сообщение, и мощность X_p уменьшаются на 1

Древесный алгоритм

Доказательство.

Наблюдение 3

Положим $|X_p| = 1$ для каждого листа

Тогда перед выполнением цикла (2) и после каждого его витка верно $\sum_{p \in V} |X_p| = 2|E| - K$, где K — суммарное число сообщений, принятых в цикле

Наблюдение 4: в заключительной конфигурации все отправленные сообщения приняты (то есть все каналы пусты)

Это следует из того, что

- каждый узел отправляет не более одного сообщения в каждый доступный канал и
- каждый последователь способен принять по одному сообщению из каждого доступного канала (команды 2.1 и 5)

Древесный алгоритм

Доказательство. $(\sum_{p \in V} |X_p| = 2|E| - K)$

Предположим от противного, что по завершении алгоритма ни один последователь не принял решение

Тогда ни один последователь не выполнил *receive* (5) после цикла (2) — иначе после этой команды можно немедленно принять решение (6)

Значит, обозначенное выше K в заключительной конфигурации — это суммарное число как принятых, так и отправленных сообщений

При этом для каждого узла верно $|X_p| \geq 1$ (команды 1, 2, 2.2), а значит,

- $\sum_{p \in V} |X_p| \geq |V|$ и
- $K = 2|E| - \sum_{p \in V} |X_p| \leq 2|V| - 2 - |V| = |V| - 2$

Но по свойствам волнового алгоритма должно быть верно $K \geq |V| - 1$ (*противоречие*) — следовательно, решение (6) обязательно принимается хотя бы раз

Древесный алгоритм

Доказательство.

Для обоснования полноты покрытия покажем индукцией по размеру поддерева, что

- если действие $\vec{\alpha}[i]$ последовательности действий вычисления алгоритма — это отправка сообщения $p \to q$,
- и если $T_{pq} = (V_{pq}, E_{pq})$ — компонента связности вершины p после удаления ребра (p, q),
- то $\forall x \in V_{pq} : \exists j \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}}, j \preceq i : \vec{\alpha}[j] \in \mathcal{A}_x$

Полнота покрытия непосредственно следует из этого факта (*когда он будет доказан*), того, что принятию решения (6) узлом r предшествует приём сообщений $s \to r$ для всех соседей s (2.1, 4), и свойств отношения $\preceq$

Древесный алгоритм

Доказательство. $(\forall x \in V_{pq} : \exists j \in \mathcal{I}_\pi, j \preceq i : \vec{\alpha}[j] \in \mathcal{A}_x)$

База: если p — лист, то $V_{pq} = \{p\}$, и $j = i$

Индуктивный переход

Если p не лист (то есть последователь), то по устройству алгоритма им отправляется сообщение $p \to q$ (4) только после предшествующего приёма сообщений $r \to p$ от всех остальных соседей r (2.1) и предшествующей взаимосвязанной отправки этих сообщений соседями r

По *предположению индукции*, упомянутому действию отправки $r \to p$ причинно-следственно предшествует хотя бы одно событие каждой вершины дерева T_{rp}

При этом $V_{pq} = (\cup_{r \in Neigh_p \setminus \{q\}} V_{rp}) \cup \{p\}$

Следовательно, по свойствам отношения $\preceq$, отправке $p \to q$ нестрого предшествуют действия во всех узлах V_{pq} ▼

Задача 2. Докажите, что в древесном алгоритме решение всегда принимают ровно два узла

Алгоритм эха

Это централизованный волновой алгоритм, предназначенный для произвольных топологий

Полагается, что каждому узлу p известно множество его соседей $Neigh_p$ (как и в древесном алгоритме)

Алгоритм устроен так:

- Инициатор
  - Рассылает фишки по всем доступным ему каналам («кричит»)
  - Собирает фишки из всех каналов («дожидается эха»)
  - Принимает решение
- Последователь
  - После получения первой фишки рассылает фишки по всем доступным ему каналам, кроме того, по которому получил первую фишку
  - Собирает фишки из всех каналов
  - Отправляет фишку в тот канал, из которого была получена первая фишка

Алгоритм эха

Код инициатора p:

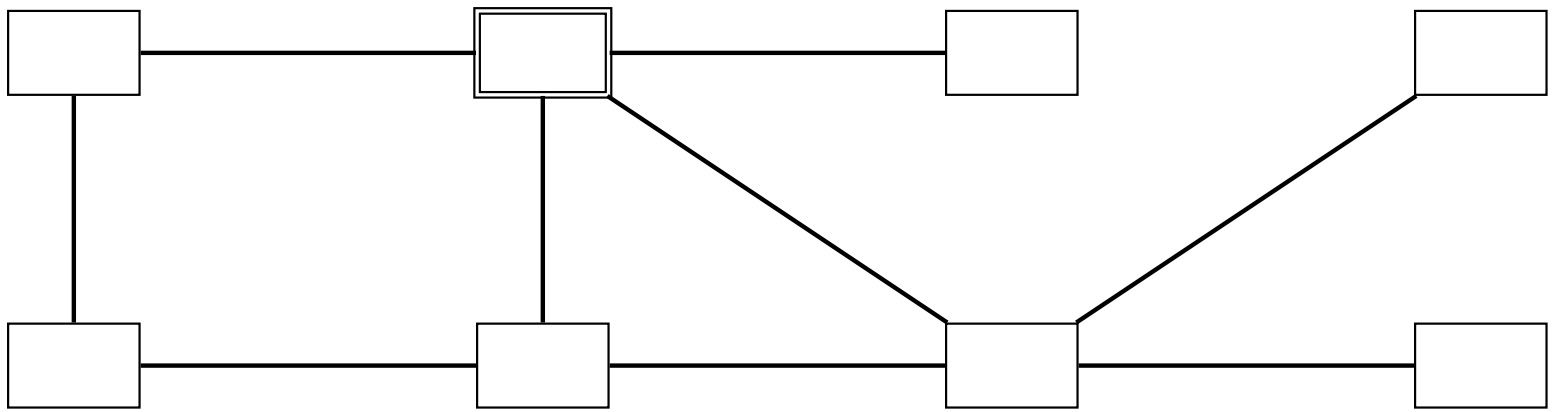
1. Для всех $q \in Neigh_p$: $send(\mathbf{tok}) \to q$
2. $N_p := 0$;
3. Пока $N_p < |Neight_p|$:
   3.1 $receive(\mathbf{tok})$ (от любого соседа)
   3.2 $N_p := N_p + 1$;
4. *decide*

Код последователя p:

1. $receive(\mathbf{tok}) \leftarrow q$ для какого-либо $q \in Neigh_p$
2. Для всех $r \in Neigh_p \setminus \{q\}$: $send(\mathbf{tok}) \to r$
3. $N_p := 0$;
4. Пока $N_p < |Neigh_p| - 1$:
   4.1 $receive(\mathbf{tok})$ (от любого соседа)
   4.2 $N_p := N_p + 1$;
5. $send(\mathbf{tok}) \to q$

Алгоритм эха

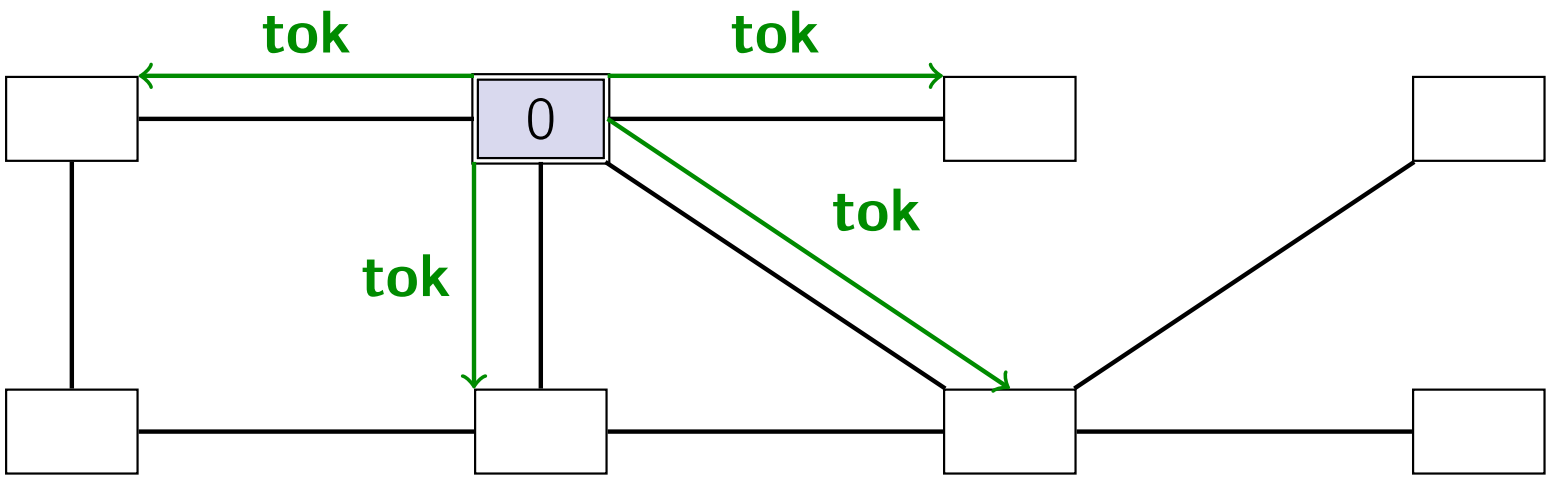
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

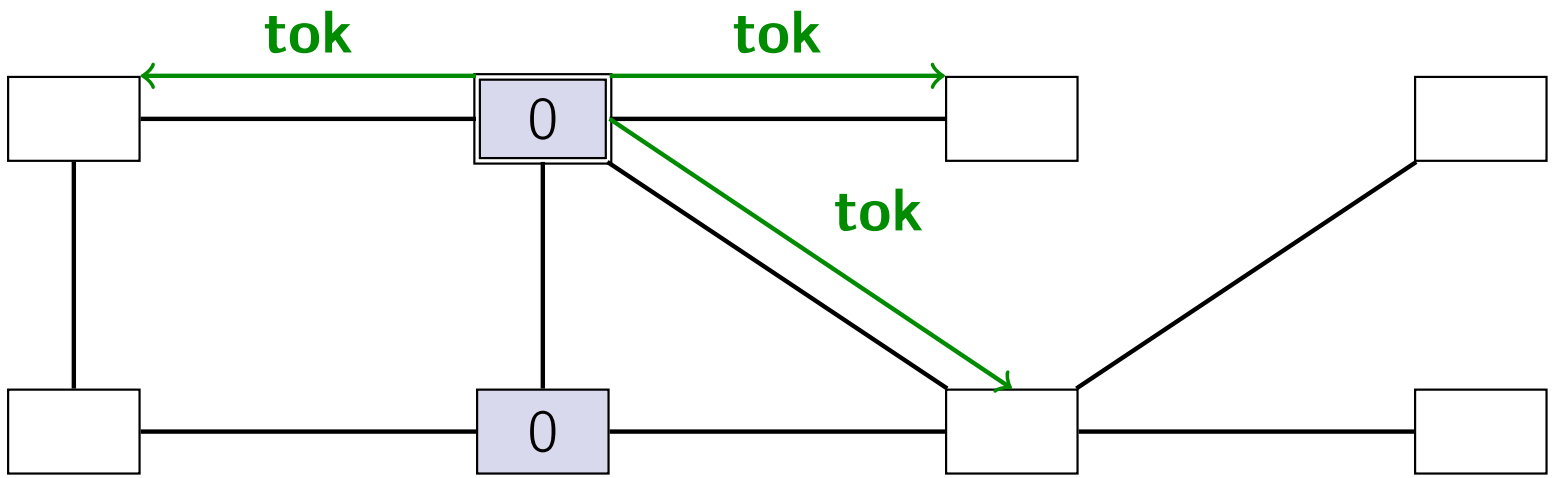
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

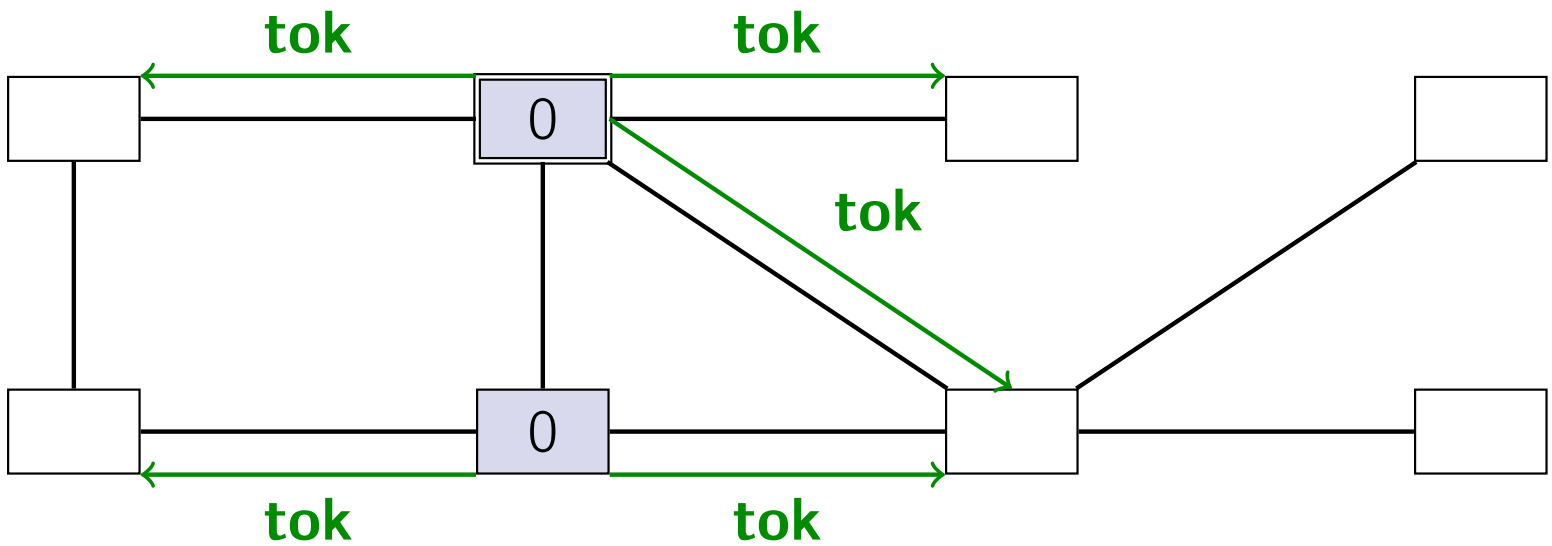
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

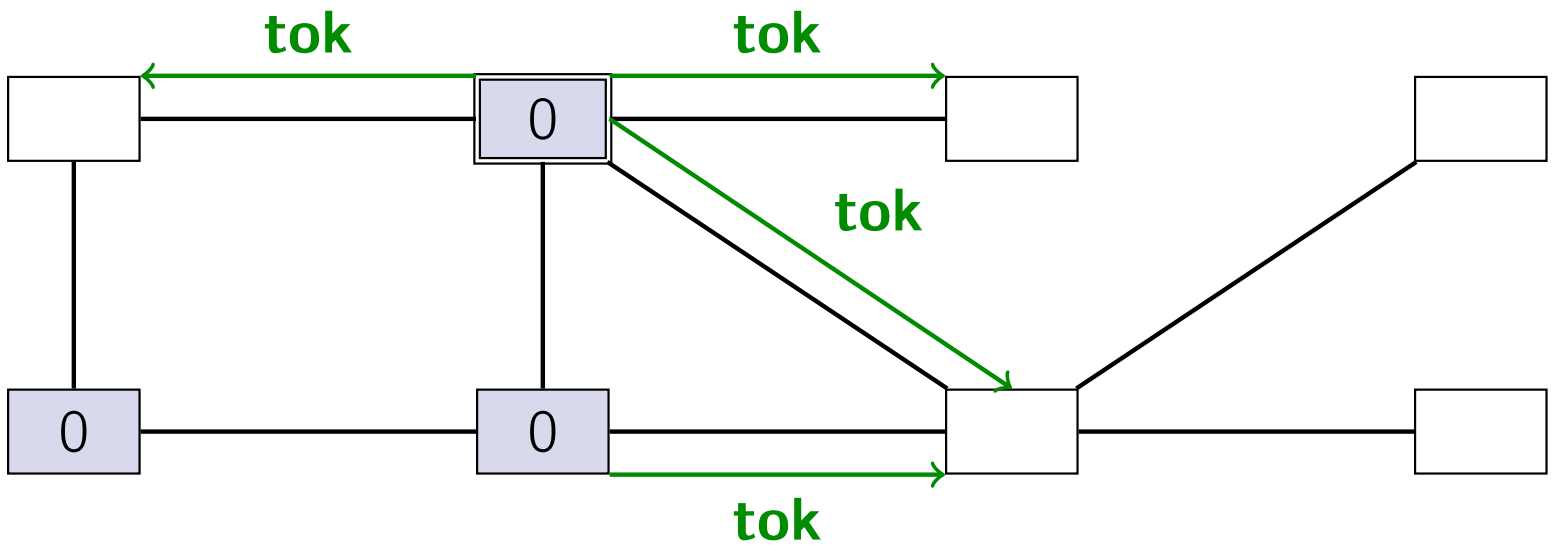
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

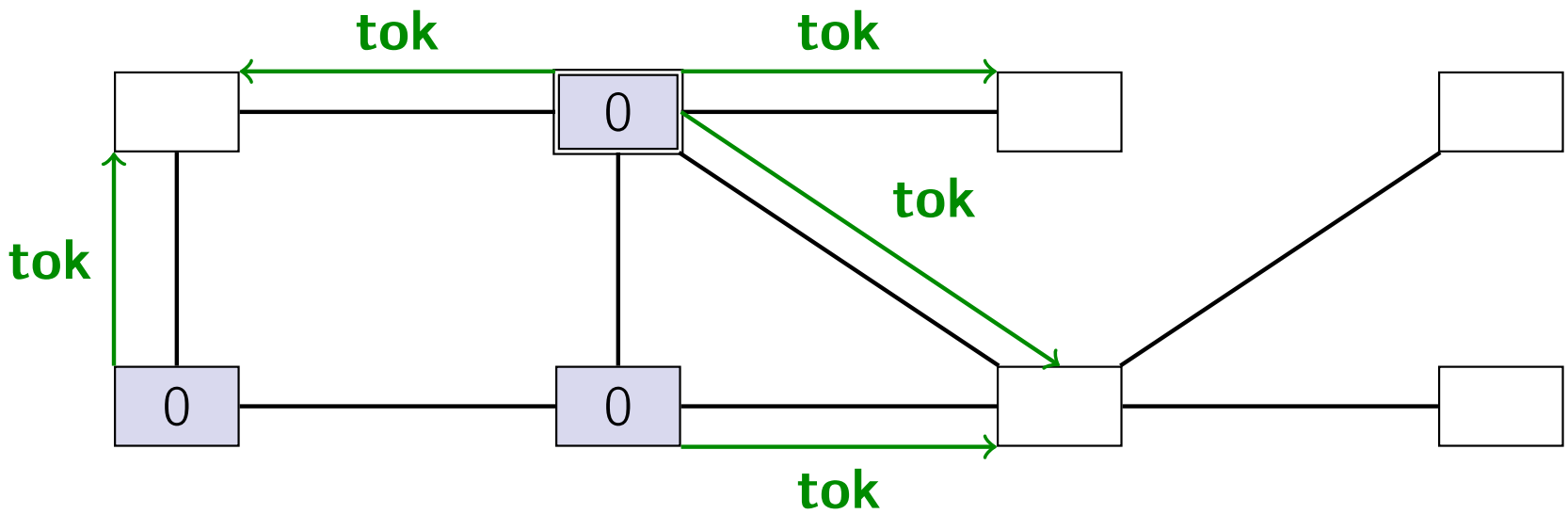
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

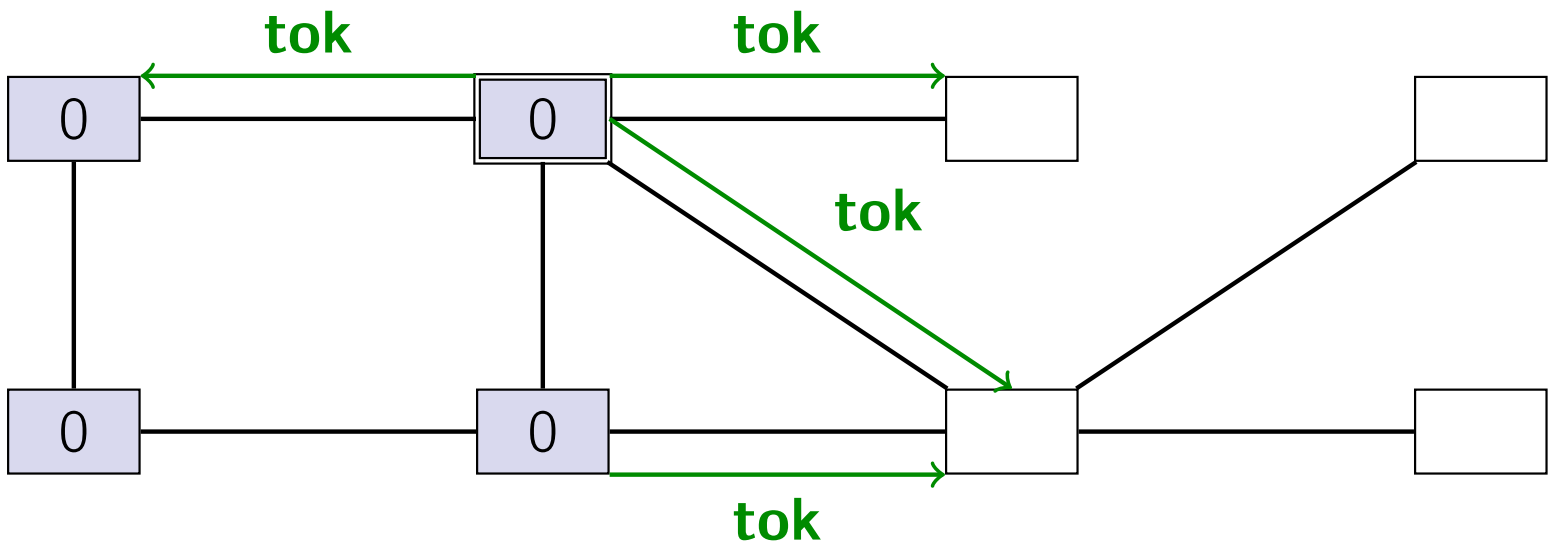
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

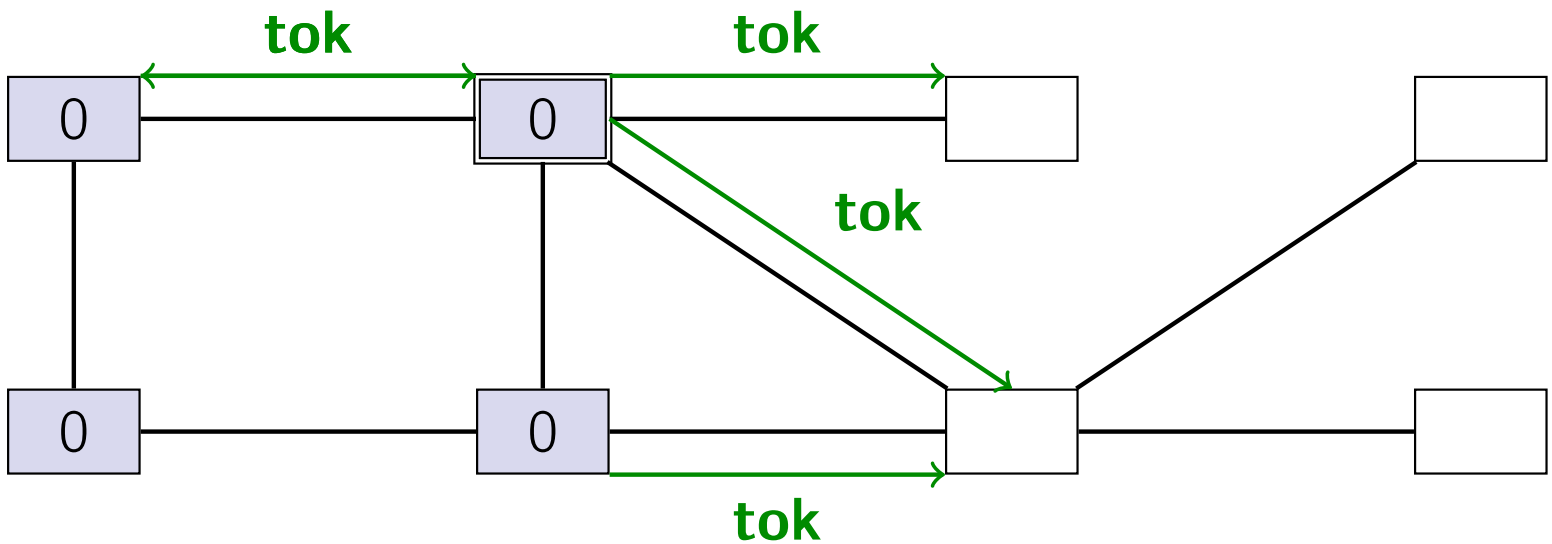
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

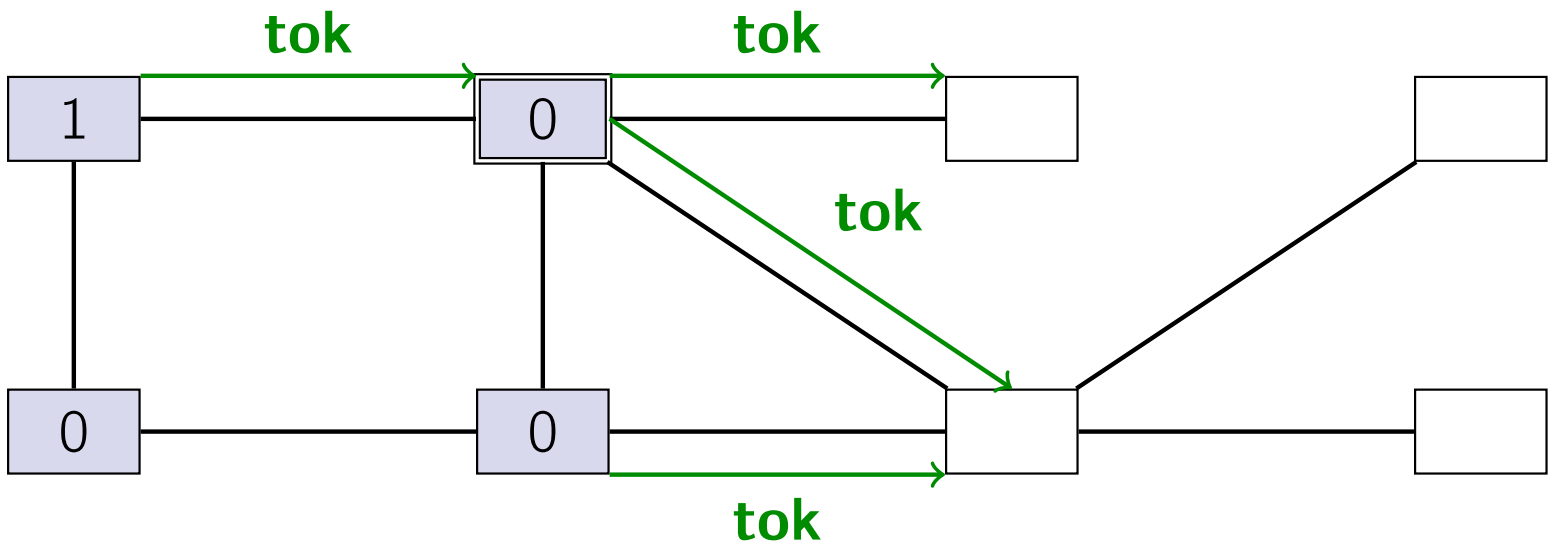
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

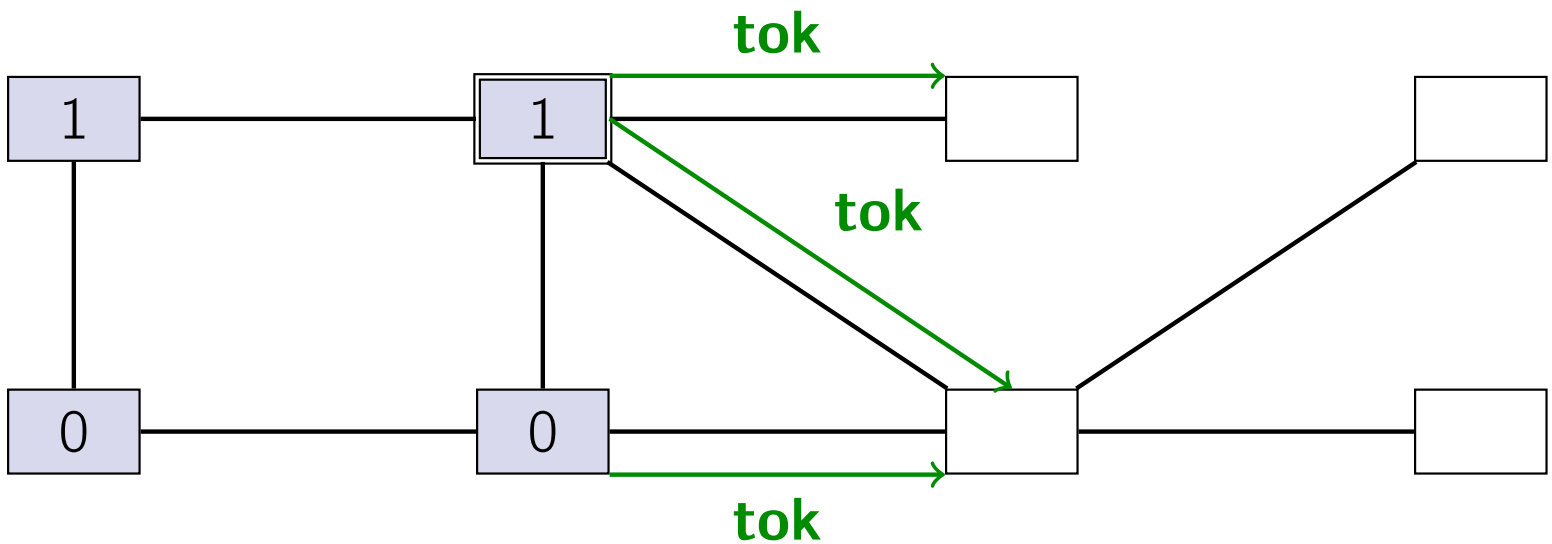
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

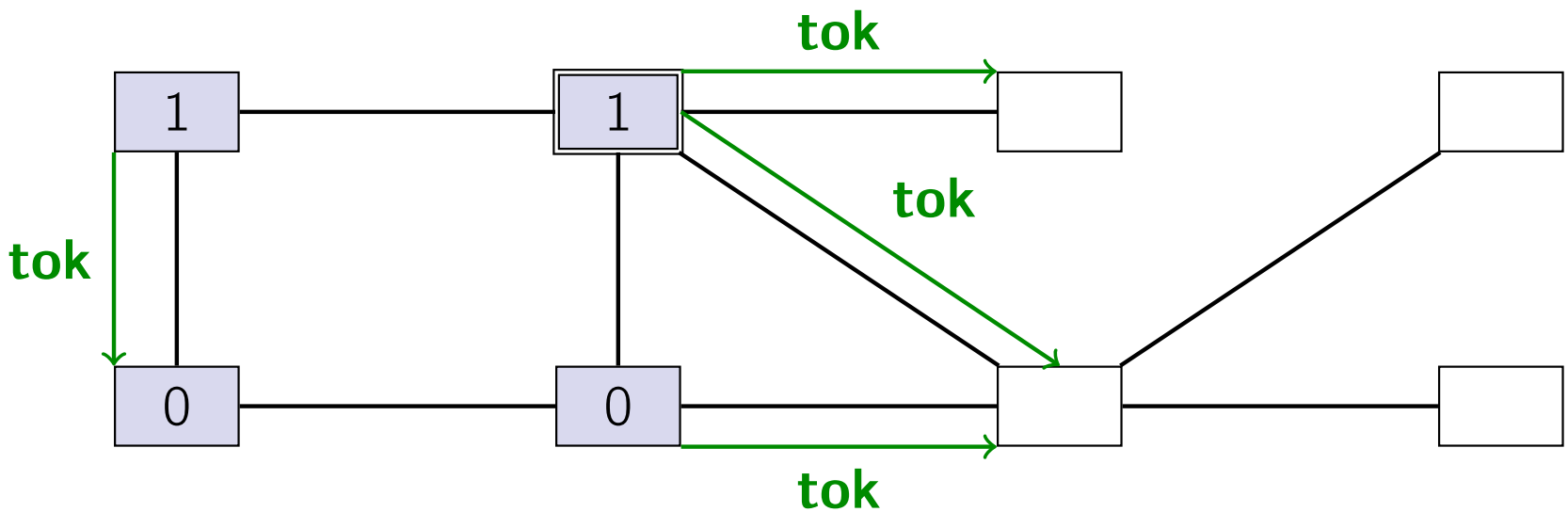
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

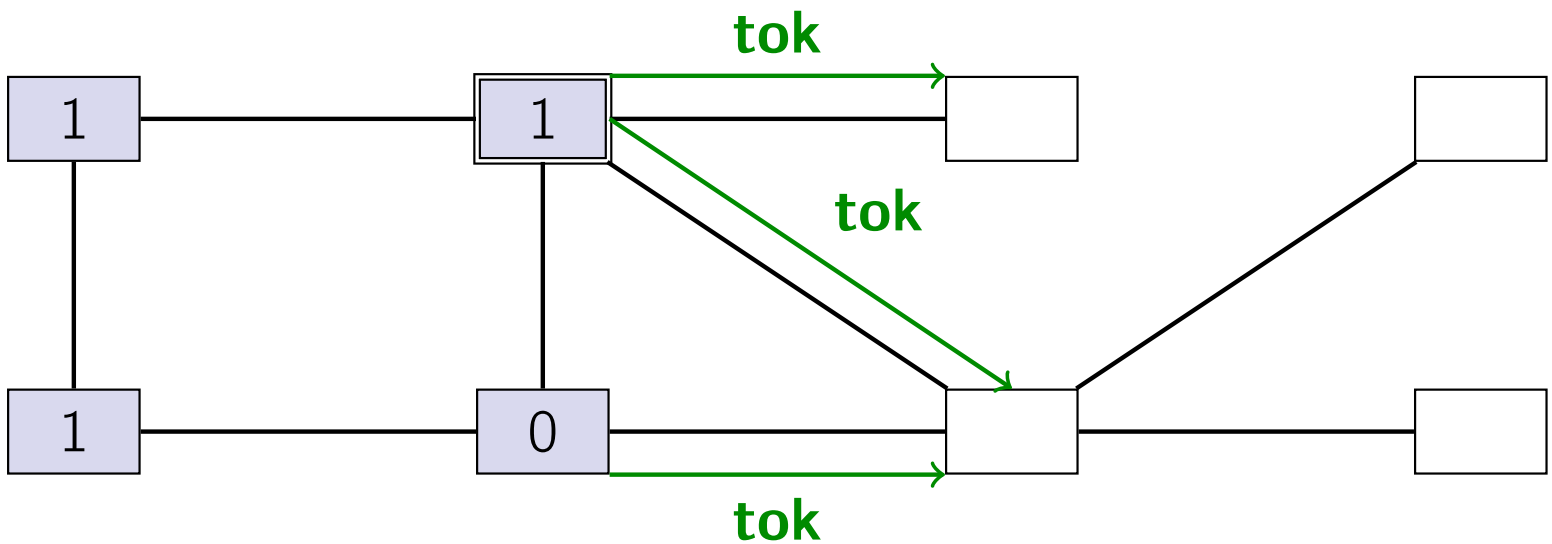
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

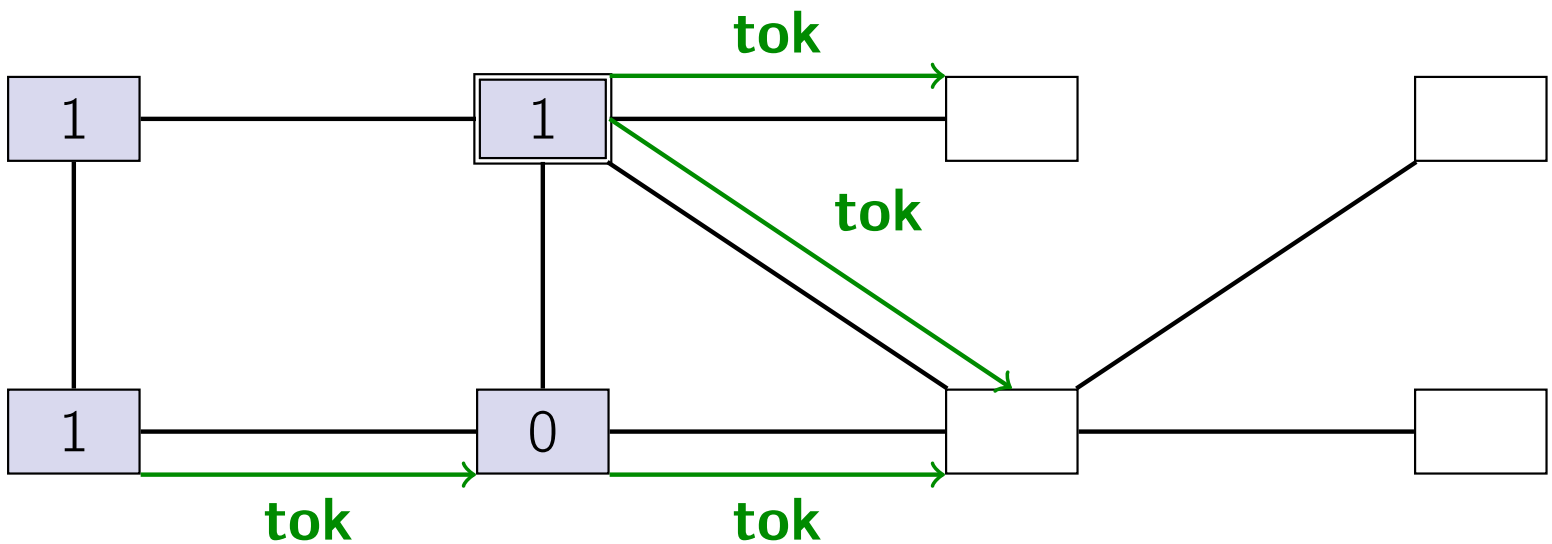
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

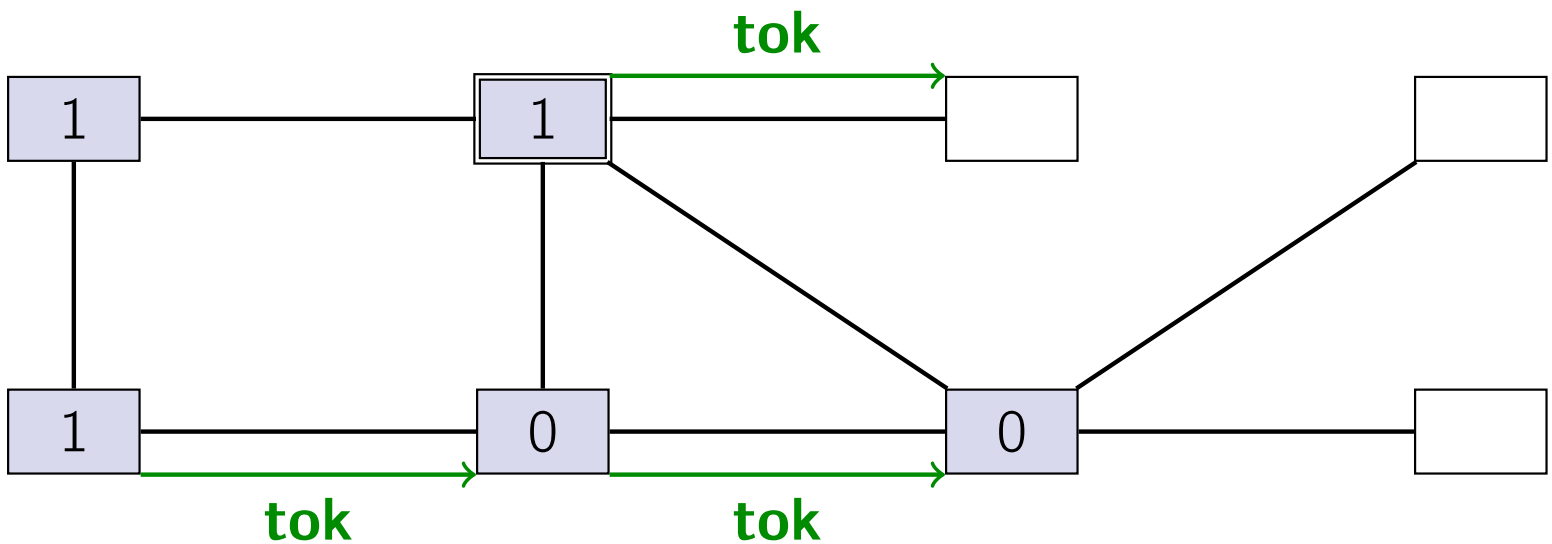
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

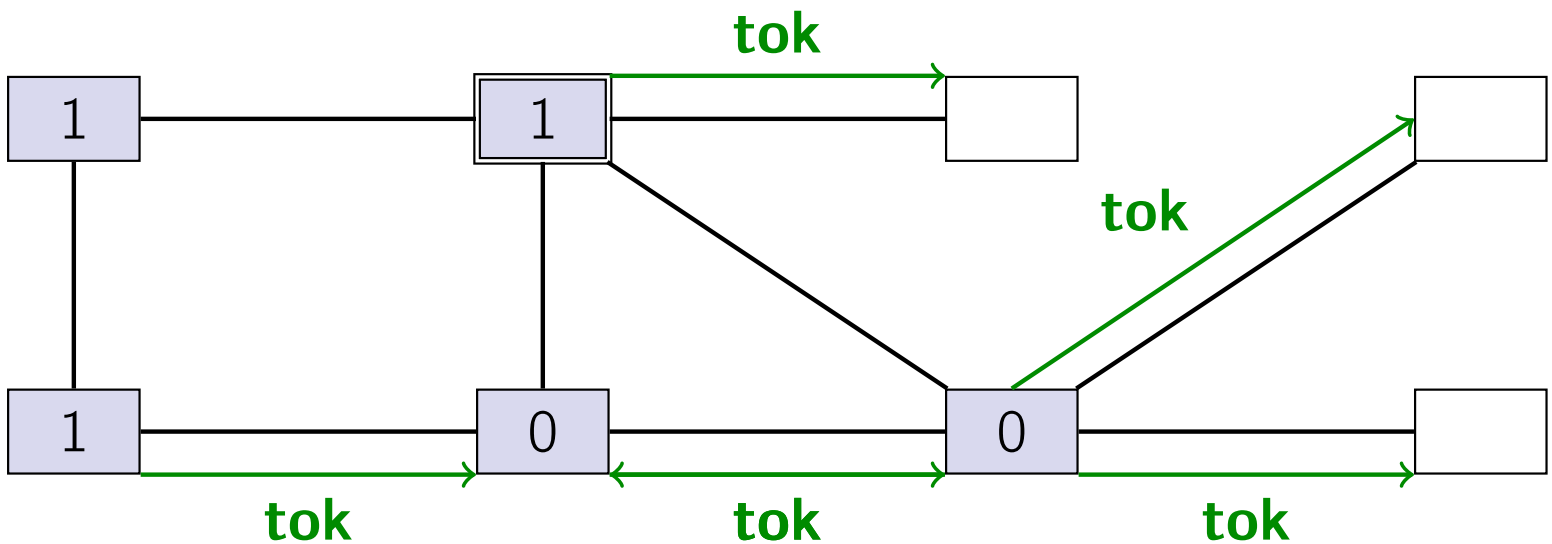
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

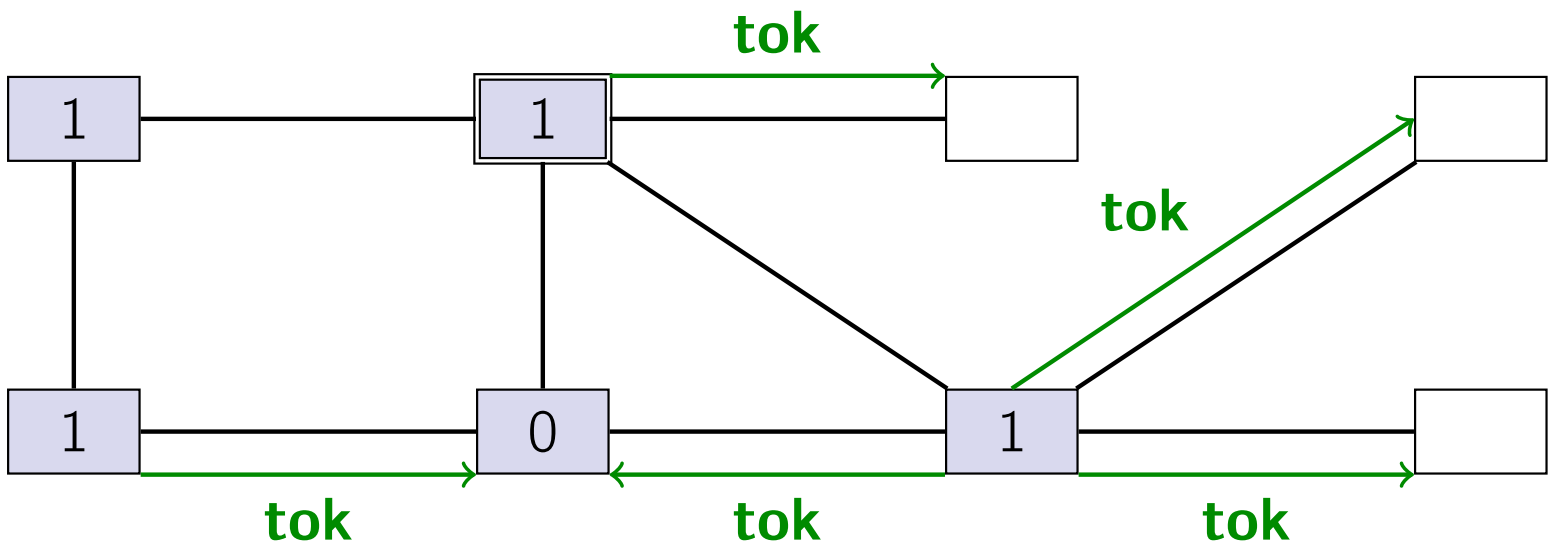
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

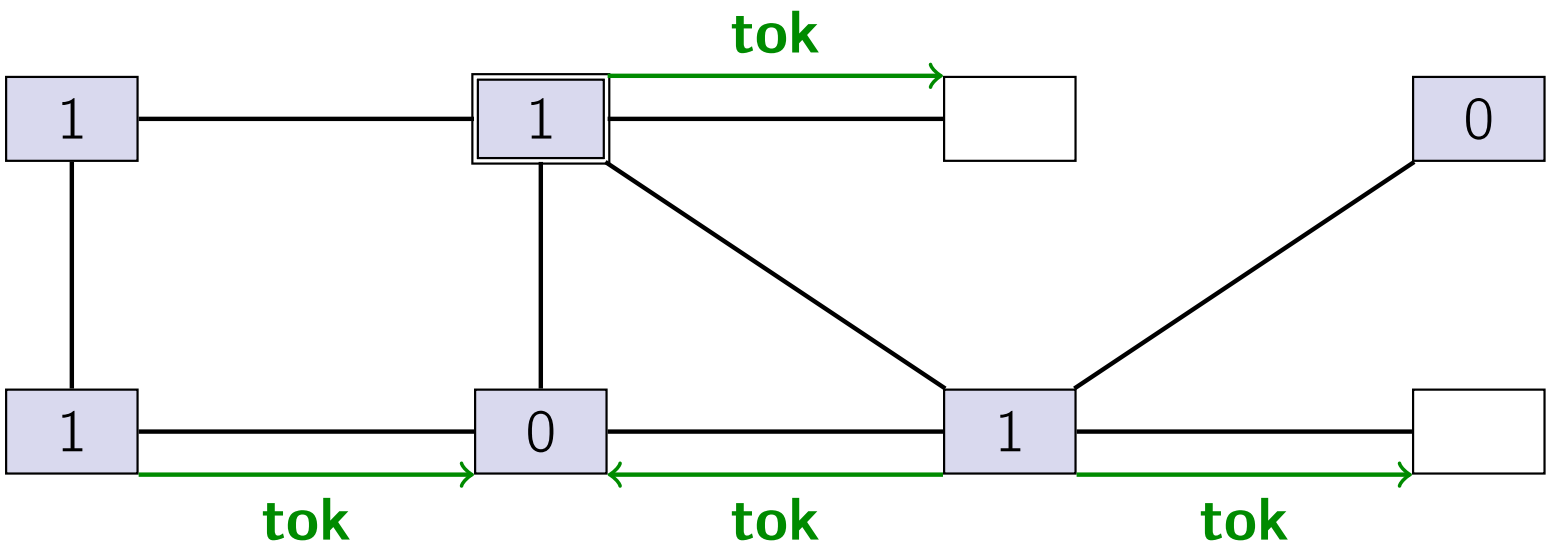
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

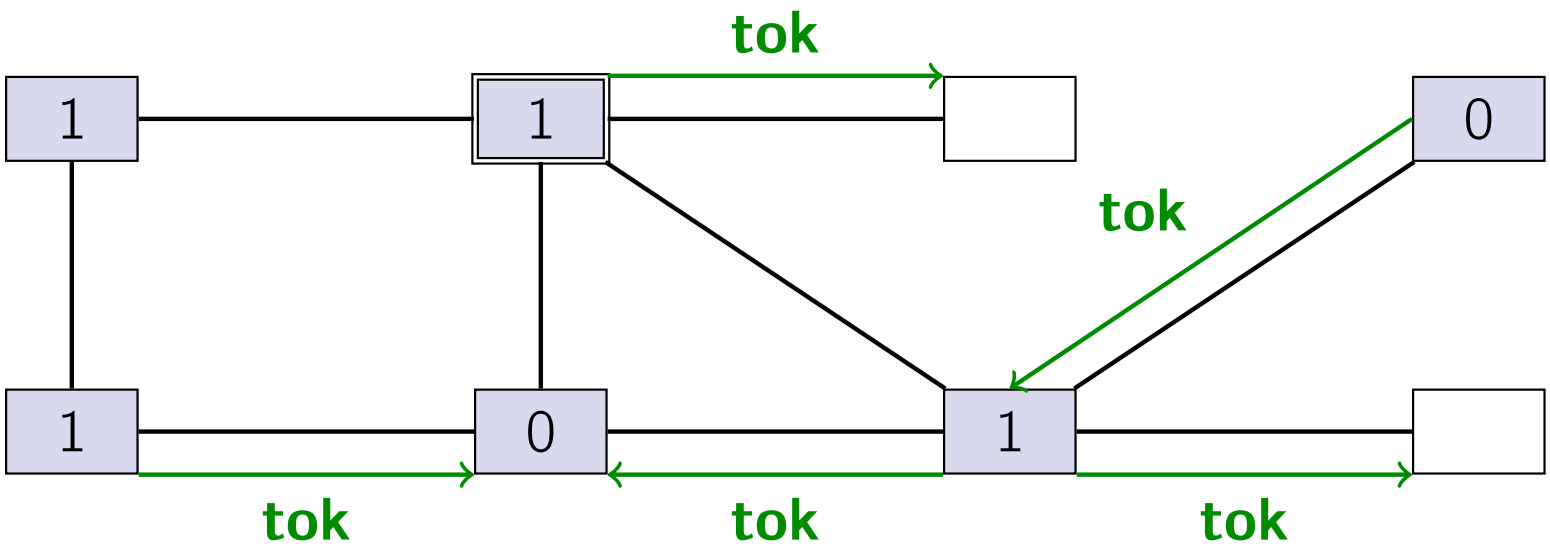
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

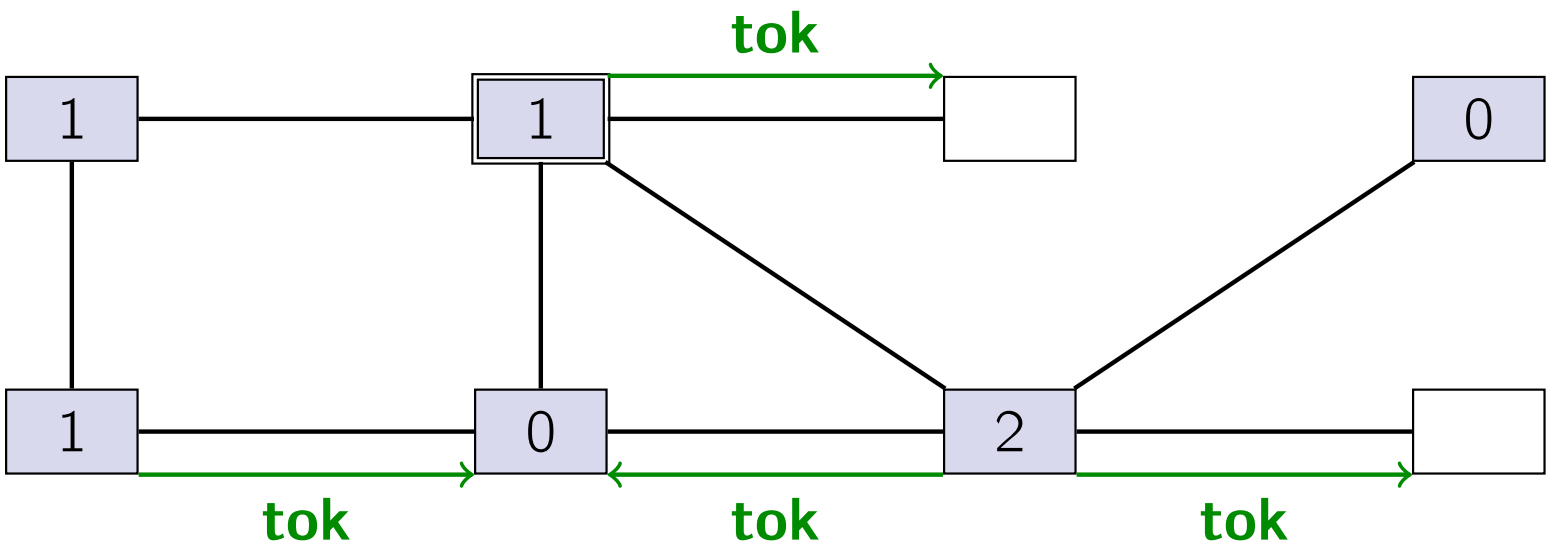
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

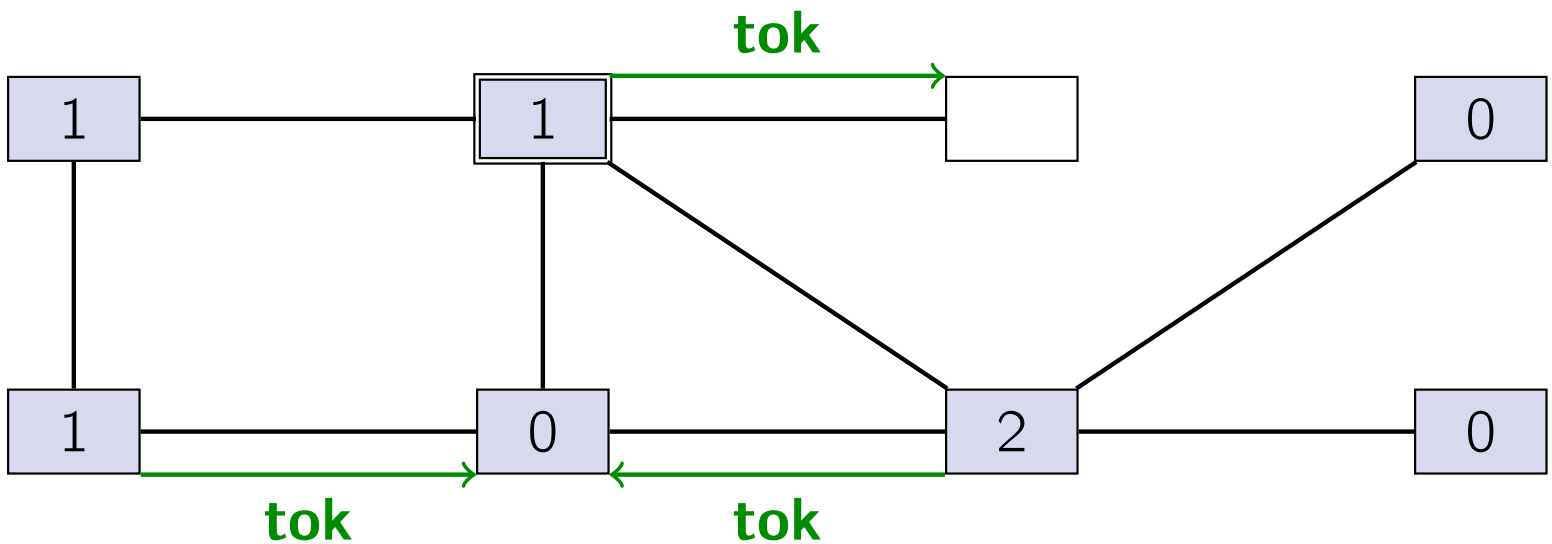
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

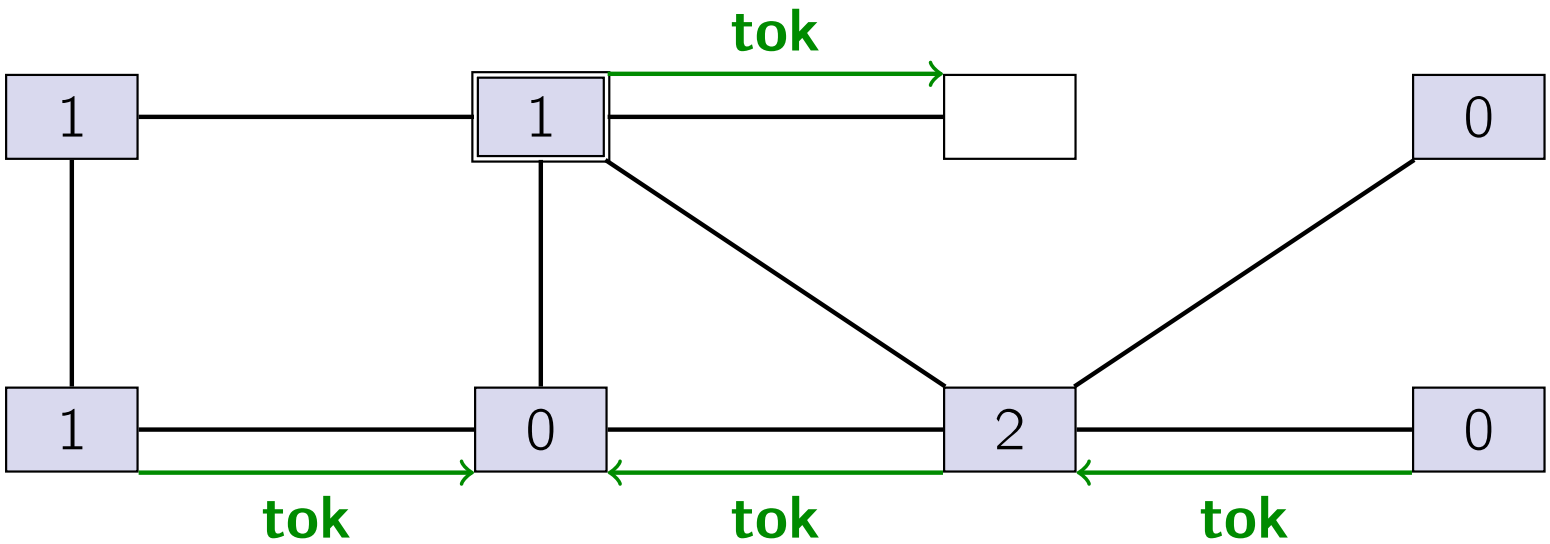
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

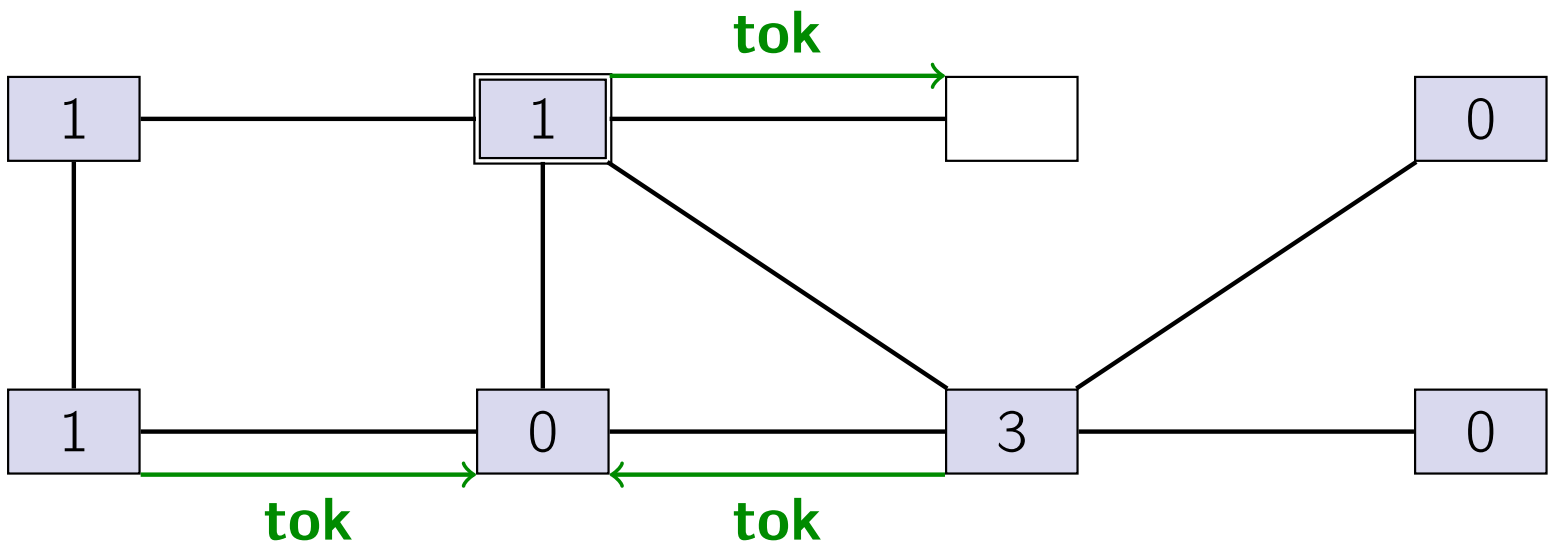
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

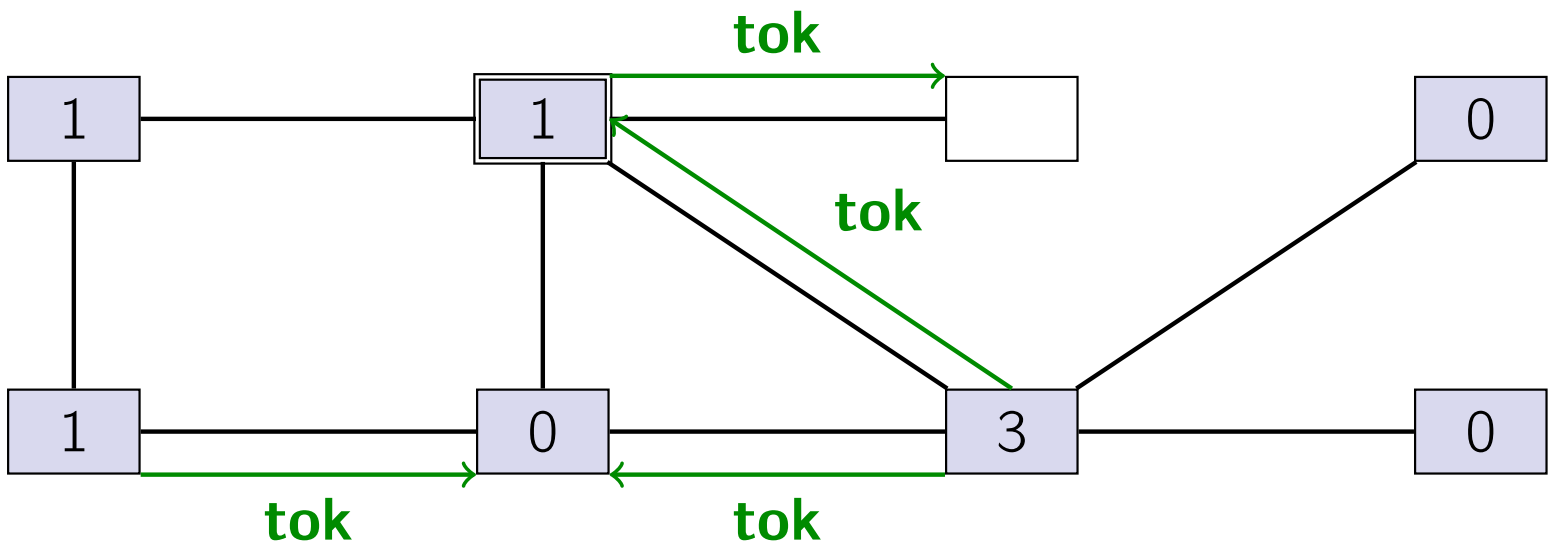
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

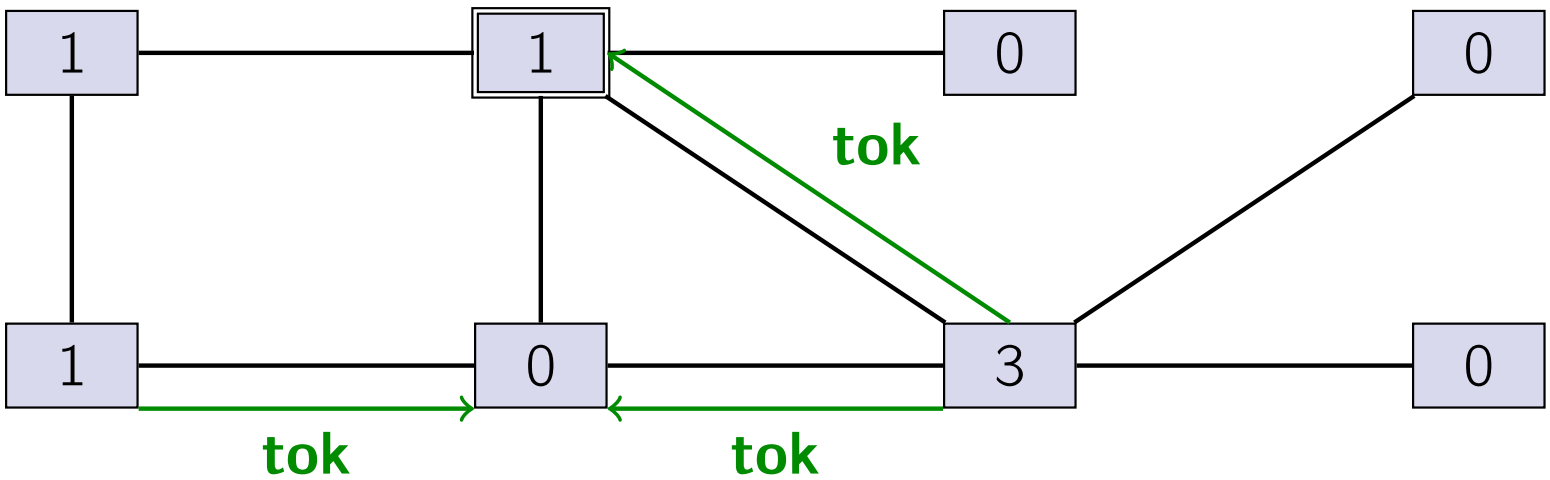
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

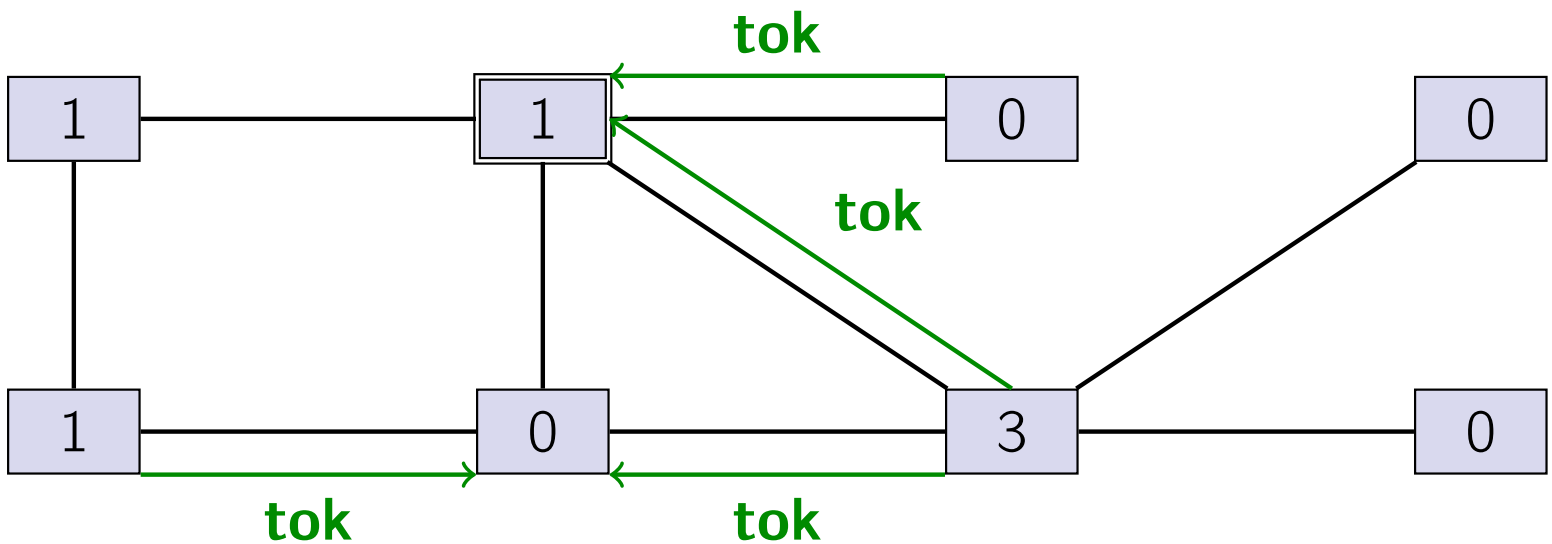
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

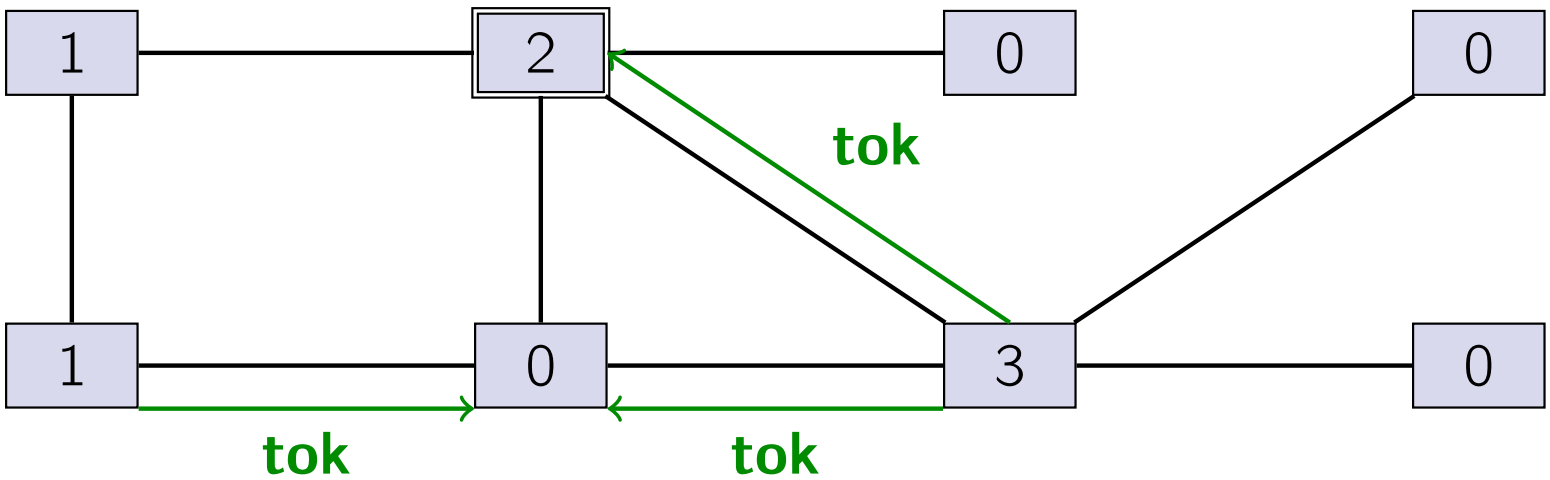
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). **Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым**

Алгоритм эха

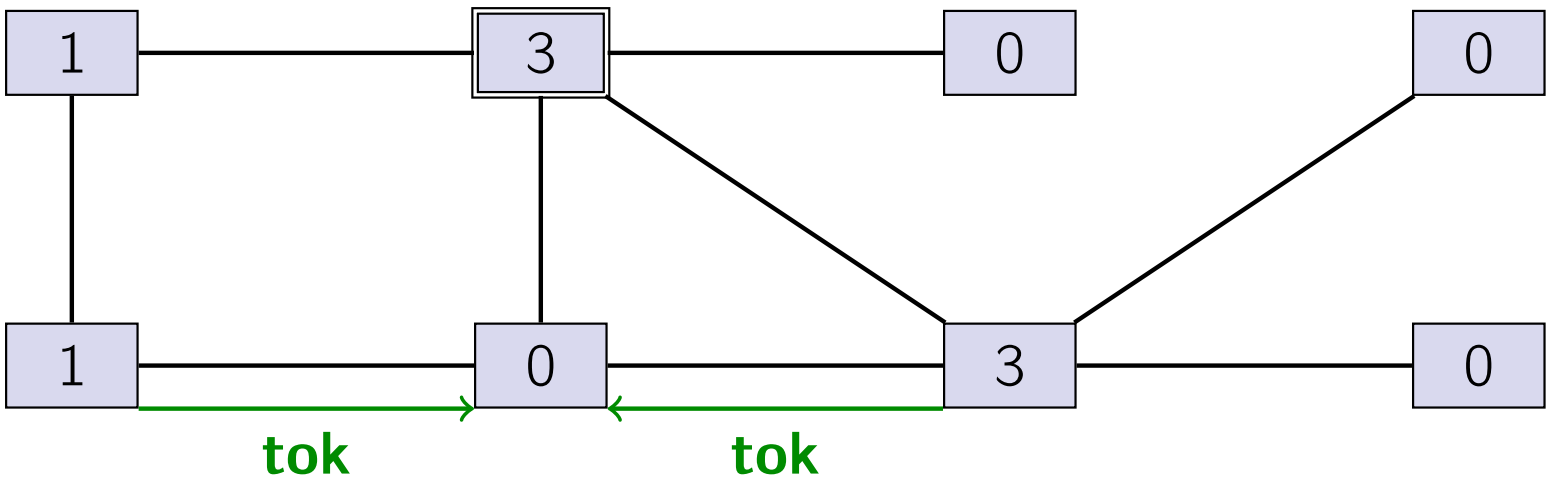
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

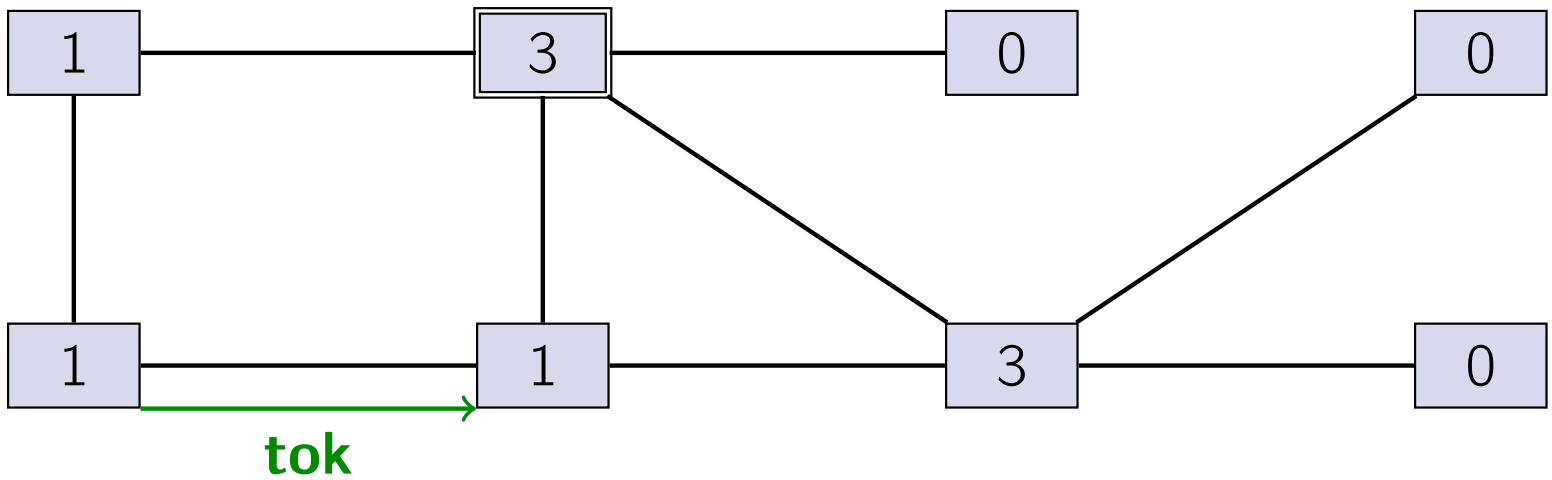
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

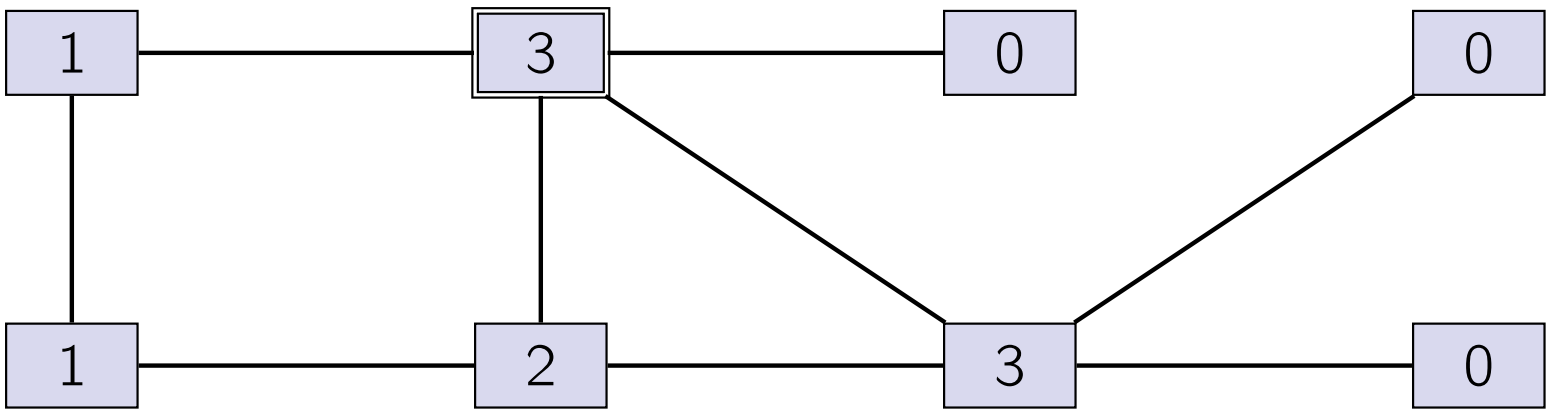
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

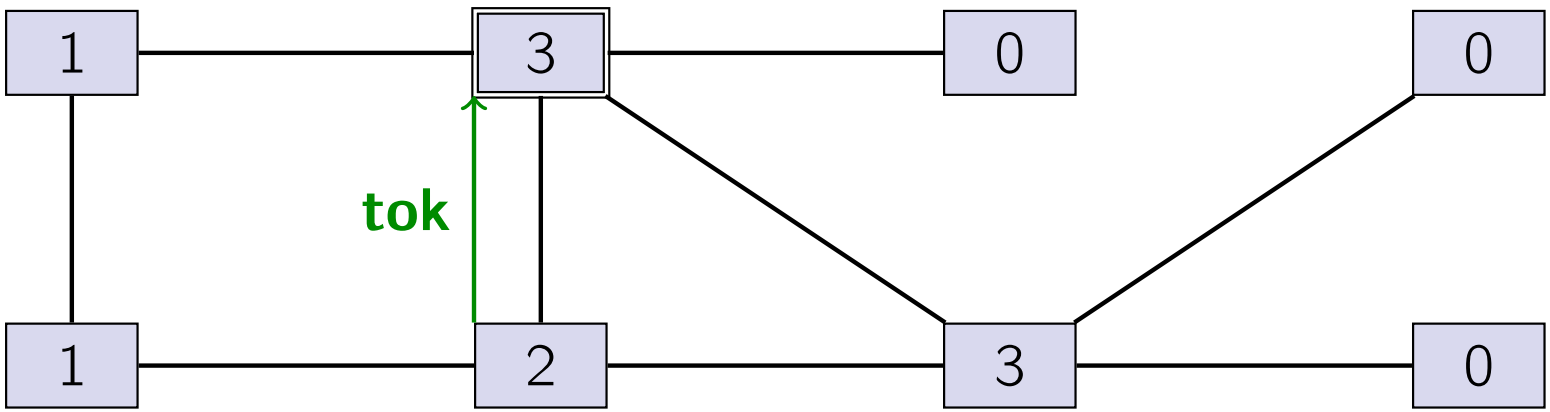
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

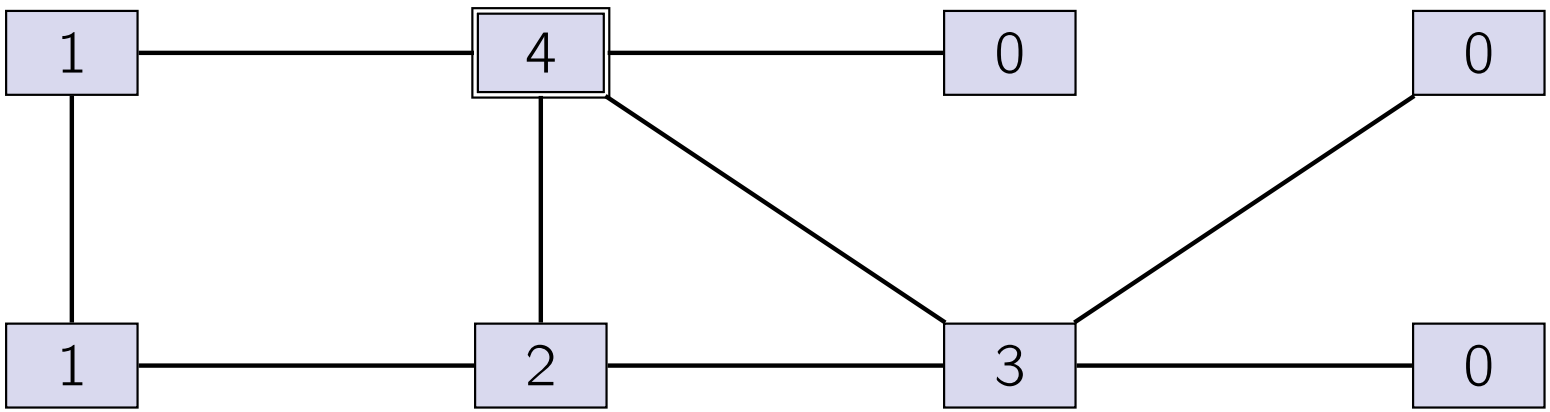
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

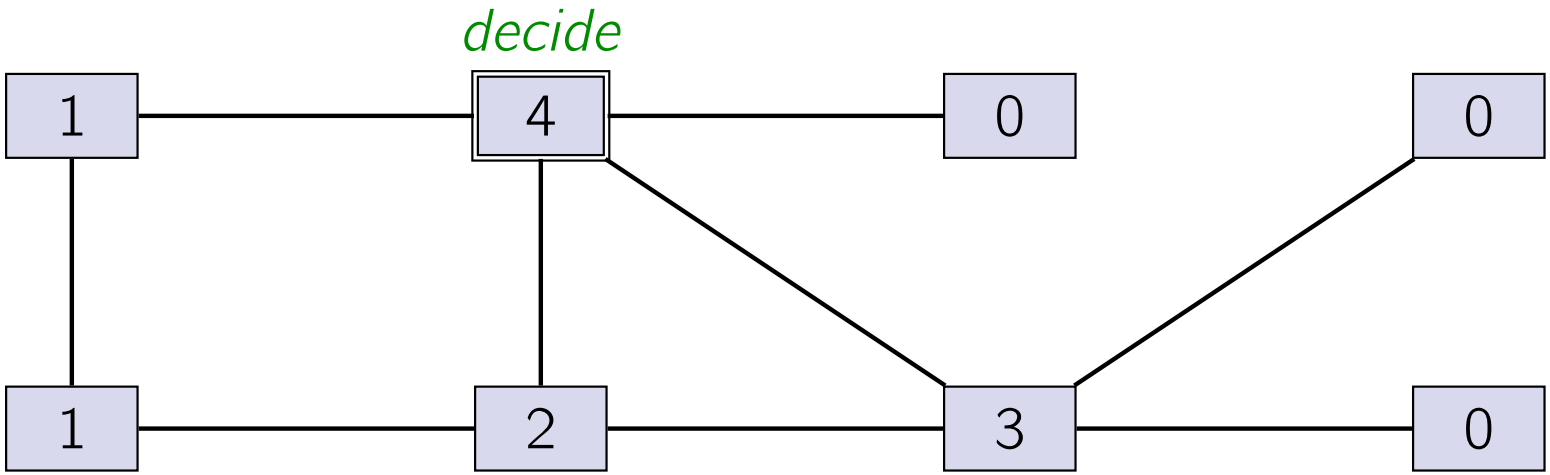
Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым

Алгоритм эха

Пример выполнения алгоритма эха



Утверждение (Задача 3). Для любого связного графа топологии с хотя бы двумя узлами алгоритм эха является волновым