

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 50

Темпоральные логики

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Темпоральные логики

Темпоральная логика (логика времени) — это разновидность модальной логики, в которой \square и \diamond отвечают **необходимости** и **возможности** выполнимости формулы в условиях течения времени, обычно «**всегда [в будущем]**» и «**иногда [в будущем]**»

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это **моменты времени**, а отношением достижимости миров описывается порядок смены моментов времени

Пример: шкала дискретного линейного отсчёта времени



Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это **атомарные высказывания**, истинность которых может изменяться с течением времени

Темпоральные логики

Течение времени может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- ▶ **Логика линейного времени**

(**LTL**, **L**inear **T**emporal **L**ogic)

- ▶ время дискретно линейно течёт вперёд
- ▶ формула — это свойство линейного развития событий

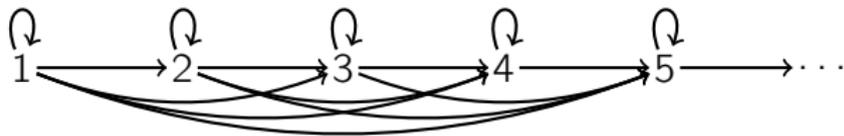
- ▶ **Логика деревьев вычислений**

(**CTL**, **C**omputation **T**ree **L**ogic)

- ▶ время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
- ▶ формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

Логика линейного времени (LTL)

Шкала LTL — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



Интерпретация LTL — это модель Крипке, основанная на шкале LTL

Модальности \square и \diamond в LTL обычно обозначаются символами **G** (**G**lobally) и **F** (in **F**uture)

К ним могут добавляться и другие модальности, описывающие те или иные взаимосвязи между высказываниями в неуклонно текущем времени

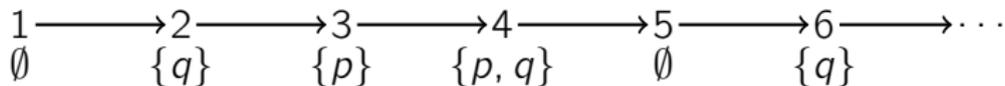
Логика линейного времени (LTL)

Пример:



Логика линейного времени (LTL)

Пример: рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} LTL с оценкой атомарных высказываний, повторяющейся с периодом 4:

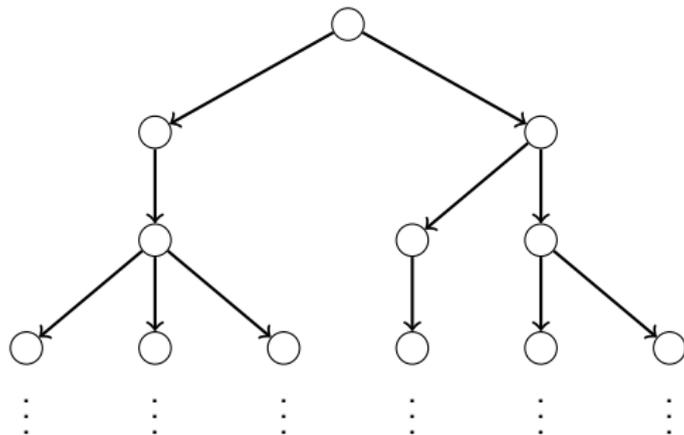


Справедливы следующие соотношения:

- ▶ в момент времени 1 неверно p и верно $p \rightarrow q$
 $\mathcal{I}, 1 \not\models p, \quad \mathcal{I}, 1 \models p \rightarrow q$
- ▶ p иногда бывает верным, но не всегда
 $\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \quad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$
- ▶ p бесконечно часто бывает верным,
но нет такого момента, начиная с которого p всегда верно
 $\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \quad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



Шкала CTL — это шкала Крипке, являющаяся рефлексивно-транзитивным замыканием такого дерева: миры — это вершины дерева, а отношение переходов — это отношение достижимости миров в дереве

Интерпретация CTL — это модель Крипке, основанная на Шкале CTL

Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности \square , \diamond записываются как **AG** (for **A**ll paths **G**) и **EF** (**E**xists path such that **F**)

CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

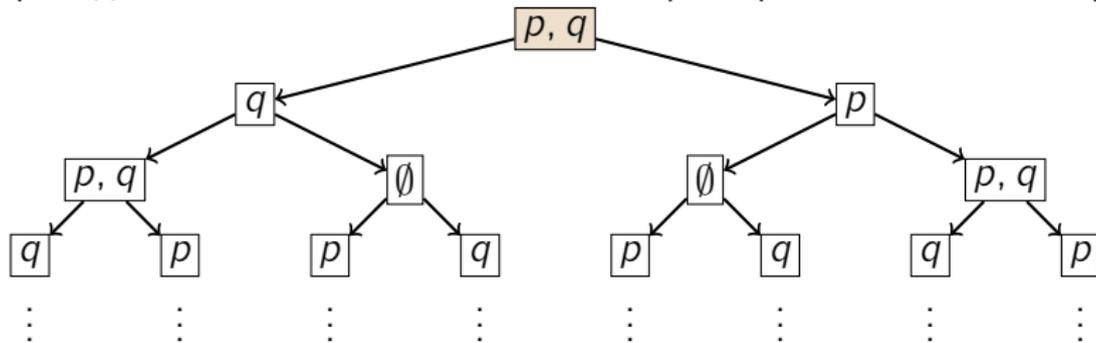
Смысл этих модальностей определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v и такая что для каждой вершины w этой ветви верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- ▶ $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ в каждой ветви дерева, исходящей из v , существует вершина w , такая что $\mathcal{I}, w \models \varphi$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} CTL

(при переходе влево изменяется значение p , вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- ▶ в начале развития событий верно p , но события могут развиваться так, что p станет неверным

$$\mathcal{I}, \blacksquare \models p, \quad \mathcal{I}, \blacksquare \models \mathbf{EF} \neg p$$

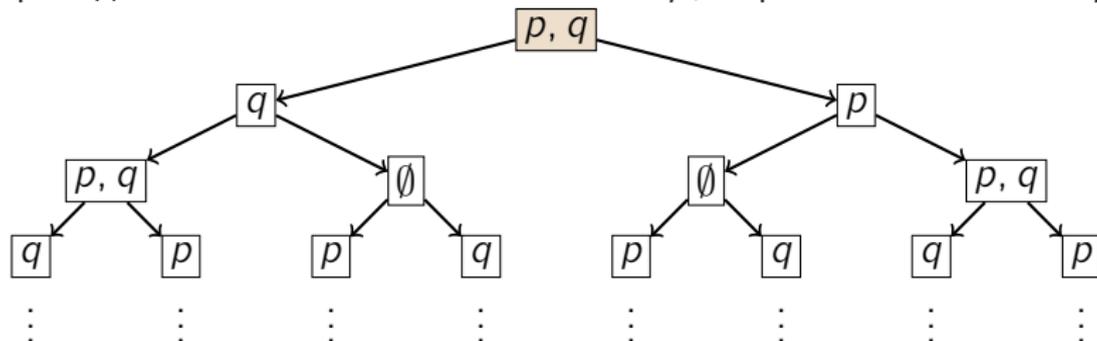
- ▶ события могут развиваться так, чтобы p всегда оставалось верным, но могут развиваться и по-другому

$$\mathcal{I}, \blacksquare \models \mathbf{EG} p, \quad \mathcal{I}, \blacksquare \not\models \mathbf{AG} p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} CTL

(при переходе влево изменяется значение p , вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- ▶ как бы ни развивались события до сих пор, есть способ в дальнейшем сделать p и q одновременно верными

$$\mathcal{I}, \blacksquare \models \mathbf{AGEF}(p \& q)$$

- ▶ утверждение «после возникновения события p рано или поздно неотвратно возникает событие q » неверно

$$\mathcal{I}, \blacksquare \not\models \mathbf{AG}(p \rightarrow \mathbf{AF}q)$$