

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 16

Предварённая нормальная форма (ПНФ)

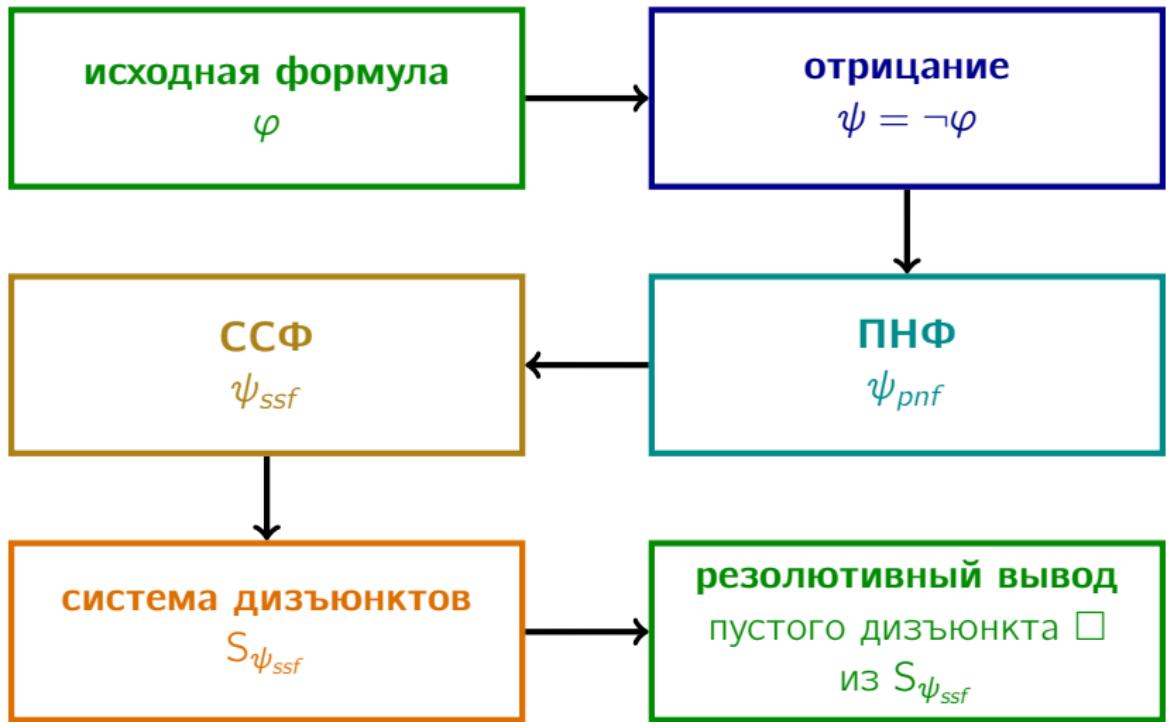
Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

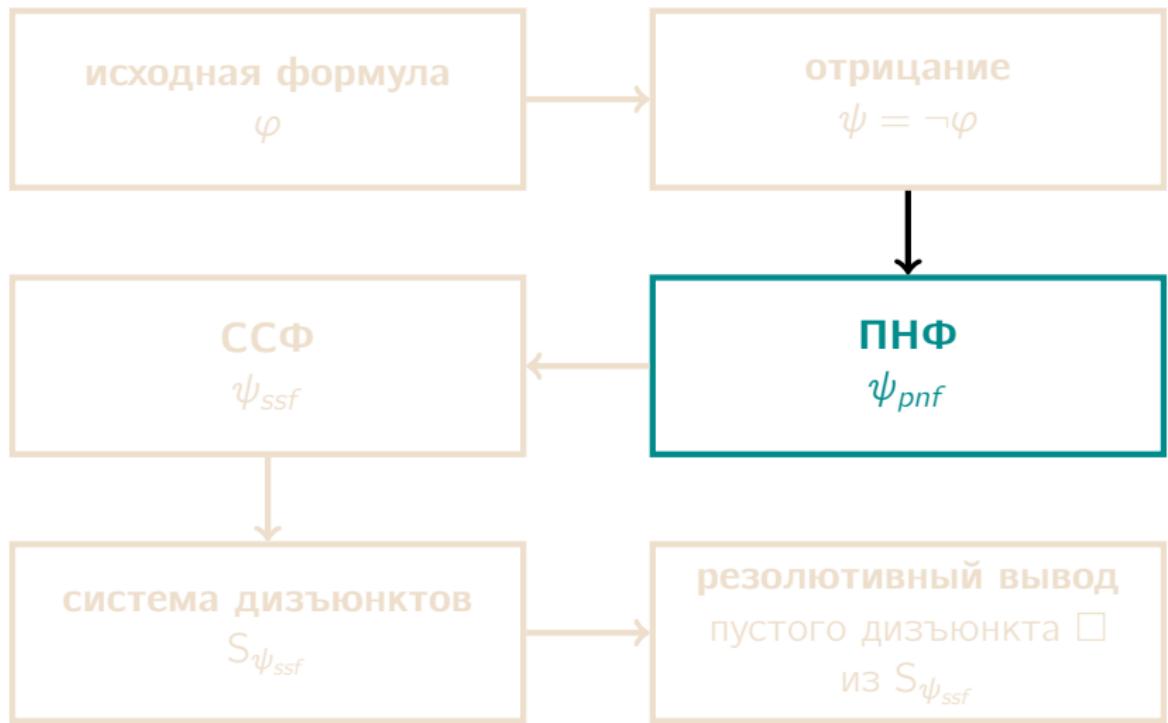
E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi$$

Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 x_1 \dots Q_n x_n}_{\text{кванторная приставка}} \quad \underbrace{(D_1 \& \dots \& D_k)}_{\text{матрица}}, \text{ где}$$

- ▶ $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- ▶ матрица — это формула без кванторов в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
 - ▶ $D_i = L_1^i \vee \dots \vee L_{m_i}^i$ — множитель
 - ▶ L_j^i — литер: атом или его отрицание

Наряду с «находится в ПНФ» будем говорить «является ПНФ»

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x \exists y \exists z \forall u (P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- ▶ кванторная приставка:

$$\forall x \exists y \exists z \forall u$$

- ▶ матрица:

$$P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z))$$

- ▶ множители: $P(x)$, $\neg R(x, u)$, $\neg P(y) \vee R(x, z)$

- ▶ литеры: $P(x)$, $\neg R(x, u)$, $\neg P(y)$, $R(x, z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов
существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

Согласно теореме о равносильной замене
и тому, что равносильность является отношением эквивалентности,
достаточно описать способ приведения произвольной формулы к ПНФ
при помощи применения основных равносильностей логики предикатов

Шаги приведения сгруппируем в несколько (5) этапов

Проиллюстрируем устройство этапов на конкретном примере:

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов
существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

1. Переименование переменных

Переименуем связанные переменные так,
чтобы кванторами связывались попарно различные переменные

Для этого применим основные равносильности

$$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\}) \quad \exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\}),$$

каждый раз выбирая «новую» переменную у

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

~

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

~

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов
существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u))$$

2. Удаление импликаций

Удалим из формулы все импликации
при помощи основной равносильности

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi$$

$$\begin{aligned} & \neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u)) \\ & \quad \sim \\ & \neg \exists x (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u)) \\ & \quad \sim \\ & \neg \exists x (\neg (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u)) \end{aligned}$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов
существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\neg \exists x (\neg(P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u))$

3. Продвижение отрицаний

Преобразуем формулу так,
чтобы отрицания располагались только непосредственно над атомами

Для этого применим основные равносильности

$$\begin{array}{lll} \neg(\varphi \& \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi & \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \& \neg\psi & \neg\neg\varphi \sim \varphi \\ \neg\forall x \varphi \sim \exists x \neg\varphi & & \neg\exists x \varphi \sim \forall x \neg\varphi & \end{array}$$

$$\neg \exists x (\neg(P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u))$$

~

$$\forall x \neg(\neg(P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u))$$

~

$$\forall x (\neg\neg(P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \& \neg\exists u R(x, u))$$

~

$$\forall x (__P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов
существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

$$\forall x (P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

4. Вынесение кванторов

Вынесем все кванторы «наружу», собрав их в кванторную приставку

Для этого применим основные равносильности

$$\begin{array}{lll} \forall x \varphi \& \psi \sim \forall x (\varphi \& \psi) & \exists x \varphi \& \psi \sim \exists x (\varphi \& \psi) & x_1 \& x_2 \sim x_2 \& x_1 \\ \forall x \varphi \vee \psi \sim \forall x (\varphi \vee \psi) & \exists x \varphi \vee \psi \sim \exists x (\varphi \vee \psi) & x_1 \vee x_2 \sim x_2 \vee x_1 \end{array}$$

После этапов 2, 3 «над» кванторами могут располагаться только $\&$ и \vee

После этапа 1 при вынесении квантора за скобки в ψ не встречается x

$$\forall x (P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

\sim

$$\forall x (P(x) \& \underline{\exists z} (\neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

\sim

$$\forall x (\underline{\exists z} (P(x) \& \underline{(\neg P(z) \vee \exists y R(x, y))}) \& \forall u \neg R(x, u))$$

$\sim \dots \sim$

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов
существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

5. Получение КНФ

С использованием законов булевой алгебры

$$\psi \vee (x_1 \& x_2) \sim (\psi \vee x_1) \& (\psi \vee x_2) \quad \psi \vee x \sim x \vee \psi$$

булеву часть формулы можно легко преобразовать в КНФ

В рассматриваемом примере никакие преобразования не нужны, а методы приведения произвольной булевой формулы к КНФ (вроде бы) должны быть вам уже известны

Итог:

после этапа 4 в формуле появляется **кванторная приставка**,
а после этапа 5 «под» приставкой располагается **КНФ**,
то есть получается ПНФ ▼

Теорема о предварённой нормальной форме

Напоследок — сквозной пример из доказательства от начала до конца

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u))$$

$$\neg \exists x (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u))$$

$$\forall x \neg (\neg (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u))$$

$$\forall x (\neg \neg (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \& \neg \exists u R(x, u))$$

$$\forall x (_ P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

$$\forall x (P(x) \& \exists z (\neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

$$\forall x (\exists z (P(x) \& (\neg P(z) \vee \exists y R(x, y))) \& \forall u \neg R(x, u))$$

...

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$