Математическая логика и логическое программирование

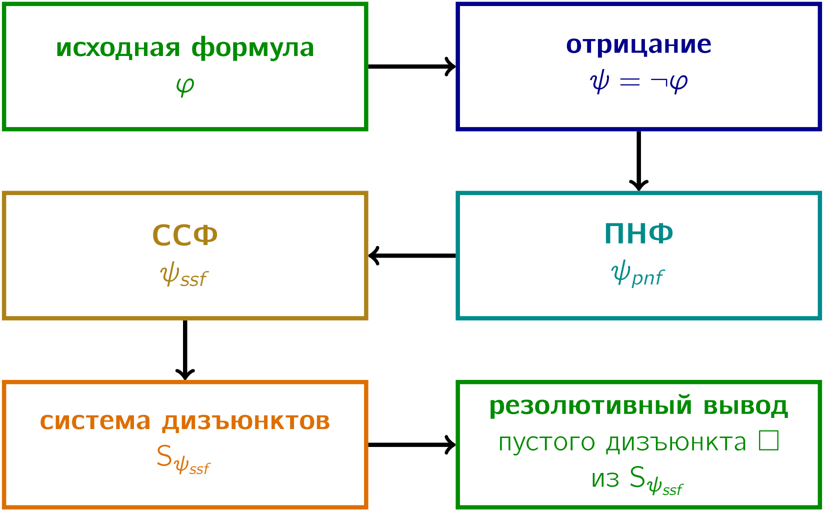
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 16

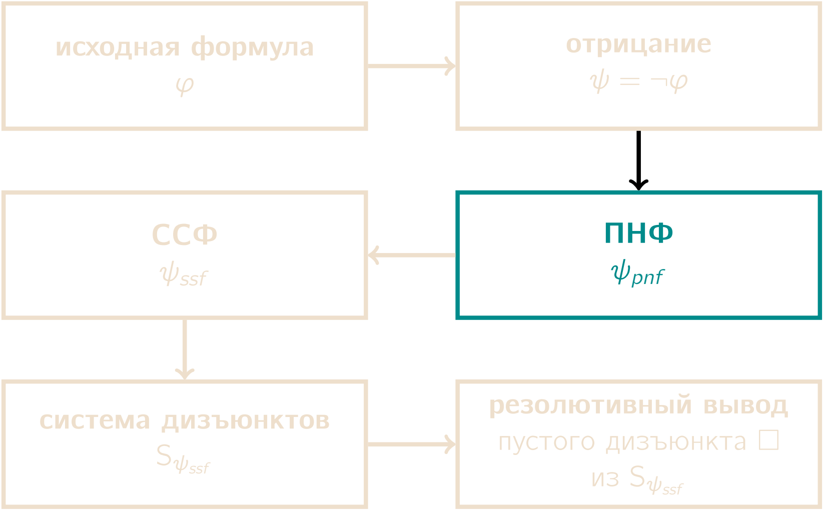
Предварённая нормальная форма (ПНФ)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi$$

Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathtt{x}_1 \ \dots Q_n \mathtt{x}_n}_{\text{кванторная приставка}} \ \underbrace{(\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k)}_{\text{матрица}} \ \text{, где}$$

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $\mathsf{D}_i = \mathsf{L}^i_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}^i_{m_i}$ — множитель
  - L^i_j — литера: атом или его отрицание

Наряду с «находится в ПНФ» будем говорить «является ПНФ»

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u\ (P(x) \,\&\, \neg R(x,u) \,\&\, (\neg P(y) \vee R(x,z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- квантορная приставка:

  $$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u$$

- матрица:

  $$P(x) \,\&\, \neg R(x,u) \,\&\, (\neg P(y) \vee R(x,z))$$

  - множители: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y) \vee R(x,z)$
  - литеры: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)$, $R(x,z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

Согласно теореме о равносильной замене
и тому, что равносильность является отношением эквивалентности,
достаточно описать способ приведения произвольной формулы к ПНФ
при помощи применения основных равносильностей логики предикатов

Шаги приведения сгруппируем в несколько (5) этапов

Проиллюстрируем устройство этапов на конкретном примере:

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\qquad \neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$

1. *Переименование переменных*

Переименуем связанные переменные так,
чтобы кванторами связывались попарно различные переменные

Для этого применим основные равносильности

$$\forall x\, \varphi \sim \forall y\, (\varphi\{x/y\}) \qquad\qquad \exists x\, \varphi \sim \exists y\, (\varphi\{x/y\}),$$

каждый раз выбирая «новую» переменную y

$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall z\, P(z) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall z\, P(z) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists u\, R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists u\,R(x,u))$

2. *Удаление импликаций*

Удалим из формулы все импликации при помощи основной равносильности

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists u\,R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y)) \to \exists u\,R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y))) \vee \exists u\,R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y))) \vee \exists u\,R(x,u))$

3. *Продвижение отрицаний*

Преобразуем формулу так,
чтобы отрицания располагались только непосредственно над атомами

Для этого примéним основные равносильности

$$\neg(\varphi \,\&\, \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \,\&\, \neg\psi \qquad \neg\neg\varphi \sim \varphi$$

$$\neg\forall x\,\varphi \sim \exists x\,\neg\varphi \qquad \neg\exists x\,\varphi \sim \forall x\,\neg\varphi$$

$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y))) \vee \exists u\,R(x,u))$$

$$\sim$$

$$\forall x\,\neg(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y))) \vee \exists u\,R(x,u))$$

$$\sim$$

$$\forall x\,(\neg\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y)))\,\&\,\neg\exists u\,R(x,u))$$

$$\sim$$

$$\forall x\,(\_\,P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\quad \forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$

4. *Вынесение кванторов*

Вынесем все кванторы «наружу», собрав их в кванторную приставку

Для этого примéним основные равносильности

$$\forall x\,\varphi \,\&\, \psi \sim \forall x\,(\varphi \,\&\, \psi) \qquad \exists x\,\varphi \,\&\, \psi \sim \exists x\,(\varphi \,\&\, \psi) \qquad \chi_1 \,\&\, \chi_2 \sim \chi_2 \,\&\, \chi_1$$

$$\forall x\,\varphi \vee \psi \sim \forall x\,(\varphi \vee \psi) \qquad \exists x\,\varphi \vee \psi \sim \exists x\,(\varphi \vee \psi) \qquad \chi_1 \vee \chi_2 \sim \chi_2 \vee \chi_1$$

После этапов 2, 3 «над» кванторами могут располагаться только $\&$ и $\vee$

После этапа 1 при вынесении квантора за скобки в ψ не встречается x

$$\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$$\sim$$

$$\forall x\,(P(x)\,\&\,\_\exists z\,(\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$$\sim$$

$$\forall x\,(\exists z\,(P(x)\,\&\,\_(\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y)))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$$\sim \ldots \sim$$

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\qquad \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{z}\, \exists \mathrm{y}\, \forall \mathrm{u}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg \mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,\&\,\neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$

5. *Получение КНФ*

С использованием законов булевой алгебры

$$\psi \vee (\chi_1 \,\&\, \chi_2) \sim (\psi \vee \chi_1)\,\&(\psi \vee \chi_2) \qquad\qquad \psi \vee \chi \sim \chi \vee \psi$$

булеву часть формулы можно легко преобразовать в КНФ

В рассматриваемом примере никакие преобразования не нужны, а методы приведения произвольной булевой формулы к КНФ (*вроде бы*) должны быть вам уже́ известны

Итог:

после этапа 4 в формуле появляется **кванторная приставка**,
а после этапа 5 «под» приставкой располагается **КНФ**,
то есть получается ПНФ ▼

Теорема о предварённой нормальной форме

Напоследок — сквозной пример из доказательства от начала до конца

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x)\to\exists y\ R(x,y))\to\exists y\ R(x,y))$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall z\ P(z)\to\exists y\ R(x,y))\to\exists y\ R(x,y))$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall z\ P(z)\to\exists y\ R(x,y))\to\exists u\ R(x,u))$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z)\vee\exists y\ R(x,y))\to\exists u\ R(x,u))$$

$$\neg\exists x\ (\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z)\vee\exists y\ R(x,y)))\vee\exists u\ R(x,u))$$

$$\forall x\ \neg(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z)\vee\exists y\ R(x,y)))\vee\exists u\ R(x,u))$$

$$\forall x\ (\neg\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z)\vee\exists y\ R(x,y)))\,\&\,\neg\exists u\ R(x,u))$$

$$\forall x\ (\_\,P(x)\,\&(\exists z\ \neg P(z)\vee\exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

$$\forall x\ (P(x)\,\&\ \_\,\exists z\ (\neg P(z)\vee\exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

$$\forall x\ (\exists z\ (P(x)\,\&\ \_\,(\neg P(z)\vee\exists y\ R(x,y)))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

$$\ldots$$

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(z)\vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$