

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 16

Равносильность формул  
логики предикатов

Лектор:  
Подымов Владислав Васильевич  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

# Вступление

Из **булевой алгебры**:

$$A \vee B \rightarrow (C \& D \rightarrow E)$$

$\mapsto$

$$(x \rightarrow y \mapsto \neg x \vee y)$$

$$\neg(A \vee B) \vee \neg(C \& D) \vee E$$

$\mapsto$

$$(\neg(x \& y) \mapsto \neg(x \vee y); \dots \mapsto \dots)$$

$$\neg A \& \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$$

$\mapsto$

$$(\dots \mapsto \dots)$$

$$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \& (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$$

Нижняя формула получена из верхней при помощи **основных тождеств** булевой алгебры

Значит, можно быть уверенным в том, что эти формулы имеют одинаковый смысл

Неплохо было бы (и для метода резолюций, и в целом) уметь преобразовывать формулы **логики предикатов** с гарантированным сохранением их смысла

# Равносильность формул

**Эквивалентность** (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$  — это сокращение для формулы  $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

Формулы  $\varphi, \psi$  **равносильны** ( $\varphi \sim \psi$ ), если формула  $\varphi \leftrightarrow \psi$  общезначима

**Утверждение.** Для любых равносильных формул  $\varphi(\tilde{x}^n), \psi(\tilde{x}^n)$  ЛП, интерпретации  $\mathcal{I}$  и набора предметов  $\tilde{d}^n$  верно следующее:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$ . Тогда:

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$$

(по определению равносильности)

$$\mathcal{I} \models ((\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi))[\tilde{d}^n]$$

(по определению общезначимости)

$$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$$

(по семантике «&»)

$$\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

(по семантике « $\rightarrow$ » и соотношению  $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$ )

( $\Leftarrow$ ) Аналогично ▼

# Равносильность формул

**Утверждение.**  $\sim$  — отношение эквивалентности

**Утверждение.** Если формула  $\varphi$  общезначима, то любая равносильная ей формула  $\psi$  также общезначима

**Утверждение.** Если формула  $\varphi$  выполнима, то любая равносильная ей формула  $\psi$  также выполнима

Если хотите, можете попробовать доказать самостоятельно, это несложно

# Основные равносильности

## Законы булевой алгебры

Коммутативность  $\&$  и  $\vee$ :

$$\varphi \& \psi \sim \psi \& \varphi$$

$$\varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

Ассоциативность  $\&$  и  $\vee$ :

$$(\varphi \& \psi) \& \chi \sim \varphi \& (\psi \& \chi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Дистрибутивность  $\vee$  относительно  $\&$  и  $\&$  относительно  $\vee$ :

$$\varphi \& (\psi \vee \chi) \sim \varphi \& \psi \vee \varphi \& \chi$$

$$\varphi \vee (\psi \& \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi)$$

Идемпотентность  $\&$  и  $\vee$ :

$$\varphi \& \varphi \sim \varphi$$

$$\varphi \vee \varphi \sim \varphi$$

Инволютивность  $\neg$ :

$$\neg \neg \varphi \sim \varphi$$

Законы де Моргана для  $\&$  и для  $\vee$ :

$$\neg(\varphi \& \psi) \sim \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg \varphi \& \neg \psi$$

Закон удаления импликации:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi$$

...

...

...

# Основные равносильности

## Правила работы с кванторами

Переименование связанной переменной:

$$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\}) \qquad \exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\})$$

(если  $y \notin \text{Var}_\varphi$  и подстановка  $\{x/y\}$  правильна для  $\varphi$ )

Продвижение отрицания под квантор:

$$\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi \qquad \neg \exists x \varphi \sim \forall x \neg \varphi$$

Вынесение квантора за скобки:

$$\begin{aligned} \forall x \varphi \& \psi \sim \forall x (\varphi \& \psi) & \exists x \varphi \& \psi \sim \exists x (\varphi \& \psi) \\ \forall x \varphi \vee \psi \sim \forall x (\varphi \vee \psi) & \exists x \varphi \vee \psi \sim \exists x (\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

(если  $x \notin \text{Var}_\psi$ )

Строго говоря,

справедливость каждой упомянутой равносильности следует обосновать

Но эти обоснования устроены очень просто и однотипно, и потому здесь не приводятся: достаточно применить **метод семантических таблиц**

# Теорема о равносильной замене

$\varphi[\psi]$  — обозначение формулы  $\varphi$ , содержащей подформулу  $\psi$

$\varphi[\psi/\chi]$  — формула, получающаяся из  $\varphi$

заменой некоторого (**любого**) числа вхождений подформулы  $\psi$  на  $\chi$

## Теорема (о равносильной замене в ЛП)

Для любых формул  $\varphi, \psi, \chi$  логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\psi] \sim \varphi[\psi/\chi]$$

Доказательство (индукцией по структуре формулы  $\varphi$ ).

*База индукции:*  $\varphi = \psi$  — очевидно ( $\psi \sim \chi \Rightarrow \psi \sim \chi$  или  $\psi \sim \psi$ )

*Индуктивный переход.* Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\tilde{x}^n) = \forall x (\varphi'[\psi])$$

Остальные случаи аналогичны

# Теорема о равносильной замене

Доказательство (индуктивный переход).

*Утверждение:*  $\forall x (\varphi'[\psi]) \sim \forall x (\varphi'[\psi/\chi])$

*Индуктивное предположение:*  $\varphi'[\psi] \sim \varphi'[\psi/\chi]$ , то есть для любой интерпретации  $\mathcal{I}$  и любых предметов  $d, \tilde{d}^n$  верно:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\models (\varphi'[\psi] \rightarrow \varphi'[\psi/\chi])[x/d, \tilde{x}^n/\tilde{d}^n] \\ \mathcal{I} &\models (\varphi'[\psi/\chi] \rightarrow \varphi'[\psi])[x/d, \tilde{x}^n/\tilde{d}^n]\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\models \forall x (\varphi'[\psi] \rightarrow \varphi'[\psi/\chi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n] \\ \mathcal{I} &\models \forall x (\varphi'[\psi/\chi] \rightarrow \varphi'[\psi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]\end{aligned}$$

Из блока 11:  $\models \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$ , а значит:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\models (\forall x \varphi'[\psi] \rightarrow \forall x \varphi'[\psi/\chi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n] \\ \mathcal{I} &\models (\forall x \varphi'[\psi/\chi] \rightarrow \forall x \varphi'[\psi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]\end{aligned}$$

Но это и есть  $\forall x (\varphi'[\psi]) \sim \forall x (\varphi'[\psi/\chi]) \blacktriangledown$



# Пример напоследок

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, сохранив его смысл — (не)выполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$\sim$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$$

$\sim$

$$\neg \forall x P(x) \vee \exists y P(y)$$

$\sim$

$$\exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$\sim$

$$\exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

$\sim$

$$\exists x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$$

$$(\exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\}))$$

$$(\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi)$$

$$(\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi)$$

$$(\exists x \varphi \vee \psi \sim \exists x (\varphi \vee \psi); \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi)$$