Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 13

Размеченные системы переходов
Справедливость для систем переходов
Справедливость в LTL

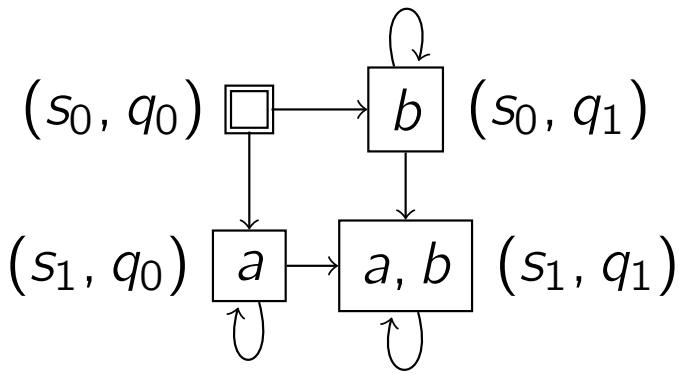
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступительный пример

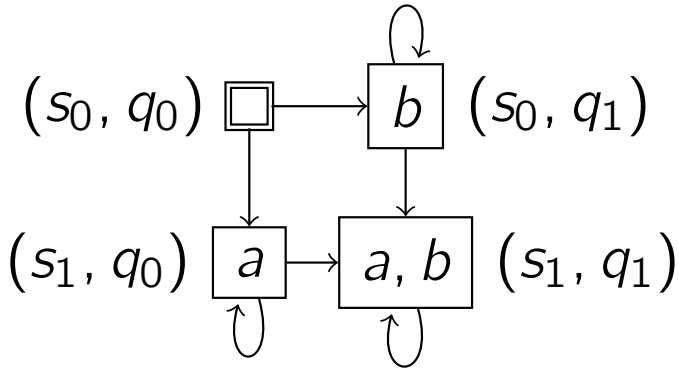
Рассмотрим такие две модели Крипке:

Асинхронная композиция этих моделей Крипке устроена так:



Насколько «реалистична» такая композиция?

Вступительный пример



Представим себе, что исходные модели отвечают программам π_1 и π_2,
асинхронная композиция — их параллельному выполнению,
a означает, что π_1 выполнила своё единственное действие и
b означает что π_2 выполнила своё единственное действие

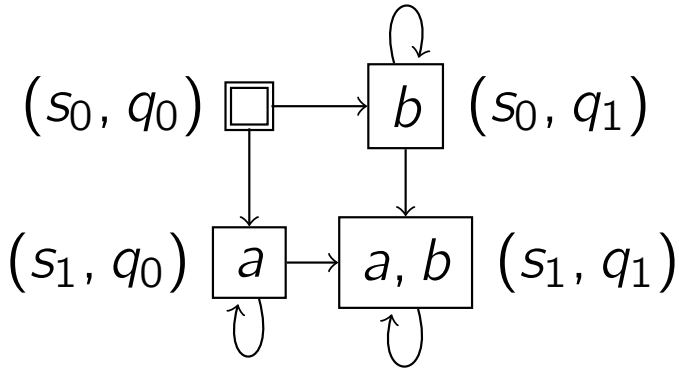
«Реальность» говорит, что если наблюдать
за независимым параллельным выполнением π_1 и π_2
достаточно долго, то каждая из программ выполнит своё действие

При этом в асинхронной композиции
есть «нереалистичное» вычисление

$$(s_0, q_0) \to (s_1, q_0) \to (s_1, q_0) \to (s_1, q_0) \to \ldots,$$

в котором π_2 не выполняет ни одного действия

Вступительный пример



$$\rho = ((s_0, q_0) \to (s_1, q_0) \to (s_1, q_0) \to (s_1, q_0) \to \dots),$$

При этом каждый конечный префикс ρ реалистичен:
в зависимости от темпа выполнения π_2, программа π_1 может выполнить любое число своих действий перед первым действием π_2

Можно сказать, что ρ **несправедливо** по отношению к π_2,
так как не даёт этой программе права выполнить даже одно действие

Точно так же вычисление

$$(s_0, q_0) \to (s_0, q_1) \to (s_0, q_1) \to (s_0, q_1) \to \dots$$

несправедливо по отношению к π_1

Так в моделях появляется понятие **справедливости**

Системы переходов

Для наиболее полного строгого задания справедливости
обобщим понятие модели Крипке,
добавив обозначение выполняемых **действий** на переходы

Размеченная система переходов (с.п.)
над множествами атомарных высказываний AP и действий Act —
это система $TS = (S, S_0, \to, L)$, отличающаяся
от модели Крипке только устройством множества переходов $\to$:

- $\to \subseteq S \times \mathrm{Act} \times S$

С.п. будем называть конечной, если конечны множества S, AP и Act

Переход $(s, \alpha, s') \in \to$ будем также понимать как помеченную дугу $s \xrightarrow{\alpha} s'$

Будем говорить, что при выполнении перехода $s \xrightarrow{\alpha} s'$
выполняется действие α

Записью $\mathrm{Act}(TS, s)$ для с.п. TS и состояния s обозначим
множество действий, которые могут выполниться в с.п. из состояния s:

$$\mathrm{Act}((S, S_0, \to, L), s) = \{\alpha \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Виды справедливости

Принято рассматривать три вида справедливости:

1. Безусловная справедливость:
   система бесконечно часто выполняет действия множества A

   - Соответствующая несправедливость:
     с некоторого момента действия из A перестают выполняться

   - Пример несправедливости:
     переходы, отвечающие программе π в асинхронной композиции,
     с некоторого момента никогда более не выполняются

Виды справедливости

Принято рассматривать три вида справедливости:

2. Сильная справедливость:
   если система бесконечно часто
   получает возможность выполнить действия множества A,
   то она бесконечно часто выполняет эти действия

   - Соответствующая несправедливость:
     с некоторого момента система
     бесконечно часто может выполнить действия из A,
     но ни разу не выполняет

   - Пример несправедливости:
     с некоторого момента принтер бесконечно часто
     (регулярно время от времени) оказывается свободным,
     но программе ни разу не удаётся его занять

Виды справедливости

Принято рассматривать три вида справедливости:

3. Слабая справедливость:
   если система почти всегда
   имеет возможность выполнить действия множества A,
   то она бесконечно часто выполняет эти действия

   - Соответствующая несправедливость:
     с некоторого момента система
     всегда может выполнить действия из A,
     но ни разу не выполняет

   - Пример несправедливости:
     с некоторого момента принтер постоянно
     (без перерывов, на которые можно было бы всё списать)
     ожидает данные на печать, но никогда их не получает

Справедливость в системах переходов

Рассмотрим бесконечный путь ρ вида

$$s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_2 \xrightarrow{\alpha_2} s_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots$$

в системе переходов TS

Этот путь для заданного множеств действий A будем называть

- безусловно A-справедливым,
  если действия из A выполняются в ρ бесконечно часто
- сильно A-справедливым, если верно хотя бы одно из двух:
  - число моментов времени i, таких что $\mathrm{Act}(TS, s_i) \cap A \neq \emptyset$, конечно
  - ρ безусловно A-справедлив
- слабо A-справедливым, если верно хотя бы одно из двух:
  - число моментов времени i, таких что $\mathrm{Act}(TS, s_i) \cap A = \emptyset$, бесконечно
  - ρ безусловно A-справедлив

Справедливость в системах переходов

Рассмотрим бесконечный путь ρ вида

$$s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_2 \xrightarrow{\alpha_2} s_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots$$

в системе переходов TS

Ограничениями справедливости назовём тройку $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w)$, где $\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w \subseteq 2^{\mathsf{Act}}$

Путь ρ будем называть $\mathcal{F}$-справедливым для ограничений справедливости $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w)$, если он

- безусловно A-справедлив для каждого $A \in \mathcal{F}_u$,
- сильно A-справедлив для каждого $A \in \mathcal{F}_s$ и
- слабо A-справедлив для каждого $A \in \mathcal{F}_w$

Обозначим записями $\Pi_{\mathcal{F}}(TS)$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(TS)$ соответственно множество всех $\mathcal{F}$-справедливых вычислений с.п. TS и множество всех трасс таких путей

Справедливость в LTL

Будем говорить, что ltl-формула выполняется на с.п. TS в ограничениях справедливости $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_w)$ ($TS, \mathcal{F} \models \varphi$), если $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(TS) \subseteq \mathrm{Tr}(\varphi)$

Пусть возможность выполнить действие из A на следующем переходе отвечает ltl-формуле Φ_A, а выполнение действия A на последнем переходе отвечает формуле Ψ_A

Сопоставим ограничениям $\mathcal{F}$ формулу $\Phi_{\mathcal{F}}$ следующего вида:

$$\Big(\mathop{\&}_{A\in\mathcal{F}_u} \mathbf{GF}\Psi_A\Big)\,\&\Big(\mathop{\&}_{A\in\mathcal{F}_s} (\mathbf{GF}\Phi_A \to \mathbf{GF}\Psi_A)\Big)\,\&\Big(\mathop{\&}_{A\in\mathcal{F}_w} (\mathbf{FG}\Phi_A \to \mathbf{GF}\Psi_A)\Big)$$

Утверждение (о справедливости в LTL). Для любых конечной с.п. TS, ограничений справедливости $\mathcal{F}$ и формулы φ верно:

$$TS, \mathcal{F} \models \varphi \Leftrightarrow TS \models \Phi_{\mathcal{F}} \to \varphi$$

Доказательство.

Можете попробовать самостоятельно, вспомнив семантику ltl-формул и утверждения о формулах вида $\mathbf{FG}\psi$ и $\mathbf{GF}\psi$