Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 13

Пересечение автоматов Бюхи
Проверка пустоты автомата Бюхи

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Напоминание

Общая схема автоматного алгоритма model checking для LTL:

1. По модели Крипке M строится автомат A_M, распознающий $\mathrm{Tr}(M)$
2. По ltl-формуле φ строится автомат $A_{\neg\varphi}$, распознающий $\mathrm{Tr}(\neg\varphi)$
3. Строится пересечение $A_\cap$ автоматов A_M и $A_{\neg\varphi}$: автомат, распознающий $\mathrm{Tr}(M) \cap \mathrm{Tr}(\neg\varphi)$
4. Проверяется пустота автомата $A_\cap$: $\mathrm{Tr}(M) \cap \mathrm{Tr}(\neg\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$
5. Выдаётся ответ: «да» $\Leftrightarrow$ автомат $A_\cap$ пуст

Пересечение автоматов Бюхи

Автомат Бюхи A будем называть пересечением автоматов Бюхи A_1 и A_2, если $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

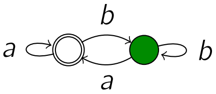
Записью $A' \otimes A''$ для автоматов Бюхи $A' = (S', S'_0, \to, F')$ и $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$ обозначим синхронную композицию этих автоматов, то есть **обобщённый** автомат Бюхи $(S, S_0, \Rightarrow, \mathcal{F})$ следующего вида:

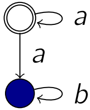
- $S = S' \times S''$
- $S_0 = S'_0 \times S''_0$
- $\mathcal{F} = \{F' \times S'', S' \times F''\}$
- $(s'_1, s''_1) \overset{x}{\Rightarrow} (s'_2, s''_2) \Leftrightarrow s'_1 \overset{x}{\to} s'_2$ и $s''_1 \overset{x}{\mapsto} s''_2$

Пересечение автоматов Бюхи

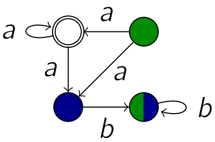
Пример

Синхронной композицией автоматов Бюхи

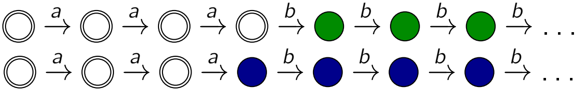




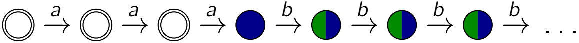
является обобщённый автомат Бюхи



Паре вычислений исходных автоматов



взаимно соответствует вычисление композиции



Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи A', A'' разобобщение их синхронной композиции является их пересечением

Доказательство

По теореме о разобобщении автомата Бюхи, достаточно показать, что верно $L(A' \otimes A'') = L(A') \cap L(A'')$

Пусть, для определённости,

- $A' = (S', S'_0, \rightarrow, F')$
- $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$
- $A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\})$

Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи A', A'' разобобщение их синхронной композиции является их пересечением

Доказательство ($L(A' \otimes A'') \subseteq L(A') \cap L(A'')$)

$(A' = (S', S'_0, \to, F'),\ A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F''),\ A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\}))$

Рассмотрим произвольное ω-слово $w \in L(A' \otimes A'')$

В $A' \otimes A''$ существует успешное вычисление ρ вида

$(s'_0, s''_0) \xRightarrow{w[0]} (s'_1, s''_1) \xRightarrow{w[1]} \dots$

По заданию автомата $A' \otimes A''$, верно следующее:

- $\rho' = (s'_0 \xrightarrow{w[0]} s'_1 \xrightarrow{w[1]} \dots)$ — вычисление автомата A'
  - Так как $inf(\rho) \cap (F' \times S'') \neq \emptyset$, то и $inf(\rho') \cap F' \neq \emptyset$
  - Значит, вычисление ρ' успешно
- $\rho'' = (s''_0 \xmapsto{w[0]} s''_1 \xmapsto{w[1]} \dots)$ — вычисление автомата A''
  - Аналогично, вычисление ρ'' успешно

Значит, $w \in L(A')$ и $w \in L(A'')$, то есть $w \in L(A') \cap L(A'')$

Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи A', A'' разобобщение их синхронной композиции является их пересечением

Доказательство ($L(A' \otimes A'') \supseteq L(A') \cap L(A'')$)

$(A' = (S', S'_0, \to, F'),\ A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F''),\ A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\}))$

Рассмотрим ω-слово $w \in L(A') \cap L(A'')$

Тогда существуют успешные вычисления ρ', ρ'' соответственно вида $(s'_0 \xrightarrow{w[0]} s'_1 \xrightarrow{w[1]} \dots)$ и $(s''_0 \xmapsto{w[0]} s''_1 \xmapsto{w[1]} \dots)$

По заданию автомата $A' \oplus A''$, верно следующее:

- $\rho = ((s'_0, s''_0) \xRightarrow{w[0]} (s'_1, s''_1) \xRightarrow{w[1]} \dots)$ — вычисление $A' \oplus A''$
- Так как $inf(\rho') \cap F' \neq \emptyset$, то и $inf(\rho) \cap (F' \times S'') \neq \emptyset$
- Аналогично, $inf(\rho) \cap (S' \times F'') \neq \emptyset$

Значит, вычисление ρ успешно, и $w \in L(A' \otimes A'')$ ▼

Напоминание

Общая схема автоматного алгоритма model checking для LTL:

1. По модели Крипке M строится автомат A_M, распознающий $\mathrm{Tr}(M)$
2. По ltl-формуле φ строится автомат $A_{\neg\varphi}$, распознающий $\mathrm{Tr}(\neg\varphi)$
3. Строится пересечение $A_\cap$ автоматов A_M и $A_{\neg\varphi}$: автомат, распознающий $\mathrm{Tr}(M) \cap \mathrm{Tr}(\neg\varphi)$
4. Проверяется пустота автомата $A_\cap$: $\mathrm{Tr}(M) \cap \mathrm{Tr}(\neg\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$
5. Выдаётся ответ: «да» $\Leftrightarrow$ автомат $A_\cap$ пуст

Проверка пустоты автомата Бюхи

Автомат Бюхи A пуст, если им распознаётся пустой язык, и непуст иначе

Для лучшего понимания теоремы, сводящей проверку пустоты автомата Бюхи к графовым задачам, полезно напомнить (или ввести) соответствующие термины

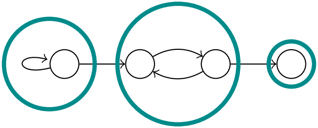
Вершина u ориентированного графа достижима из вершины v, если в этом графе существует путь из v в u (быть может, тривиальный, если $u = v$)

Ориентированный граф называется сильно связным, если любые две его вершины достижимы друг из друга

Проверка пустоты автомата Бюхи

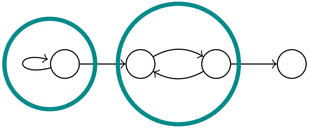
Компонента сильной связности ориентированного графа — это максимальный по включению вершин и дуг сильно связный подграф этого графа

Например, ниже в графе обведены окружностями все компоненты сильной связности:



Компонента сильной связности нетривиальна, если в ней содержится хотя бы одна дуга

Например, ниже в графе обведены окружностями все нетривиальные компоненты сильной связности:



Проверка пустоты автомата Бюхи

Теорема (о проверке пустоты автомата Бюхи). Автомат Бюхи A непуст $\Leftrightarrow$ в нём существует начальное состояние, из которого достижима хотя бы одна нетривиальная компонента сильной связности, содержащая хотя бы одно допускающее состояние

Доказательство

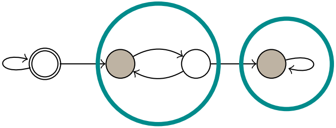
Если справедлива правая часть теоремы, то можно легко получить успешное вычисление: это путь из указанной начальной вершины к указанной компоненте, продолженный произвольным бесконечным обходом вершин этой компоненты

Если справедлива левая часть теоремы, то достаточно выбрать произвольное успешное вычисление, выделить в нём повторяющуюся вершину, такую что в подпути между выделенными повторами есть хотя бы одно допускающее состояние, и заметить, что тогда в автомате есть компонента сильной связности, содержащая вершины и дуги этого подпути (т.е. нетривиальная) ▼

Проверка пустоты автомата Бюхи

Примеры

Следующий автомат Бюхи непуст (компоненты сильной связности, упомянутые в теореме, обведены кругами):



Следующий автомат Бюхи пуст (не содержит требуемых в теореме компонент сильной связности):

Поиск компонент сильной связности в ориентированном графе — это известная задача, для которой известны эффективные решающие алгоритмы («лобовой» через транзитивное замыкание, Косарайю, Тарьяна, стековый, ...)