# Математическая логика и логическое программирование

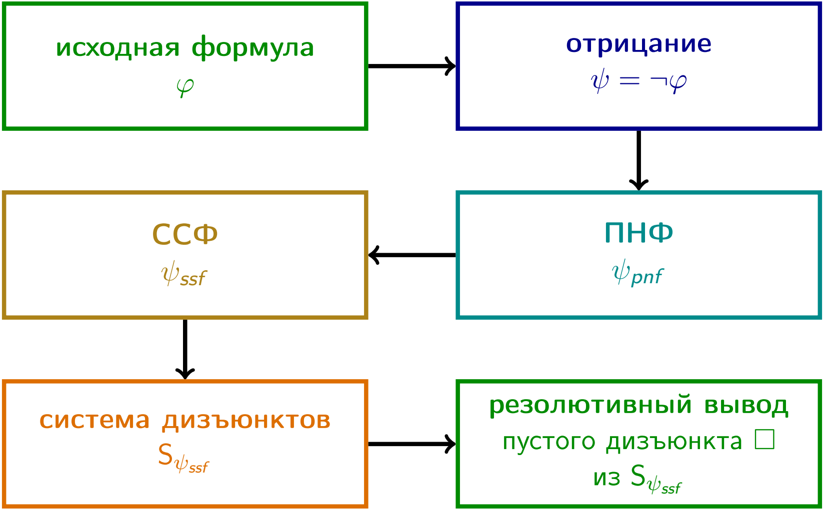
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 19

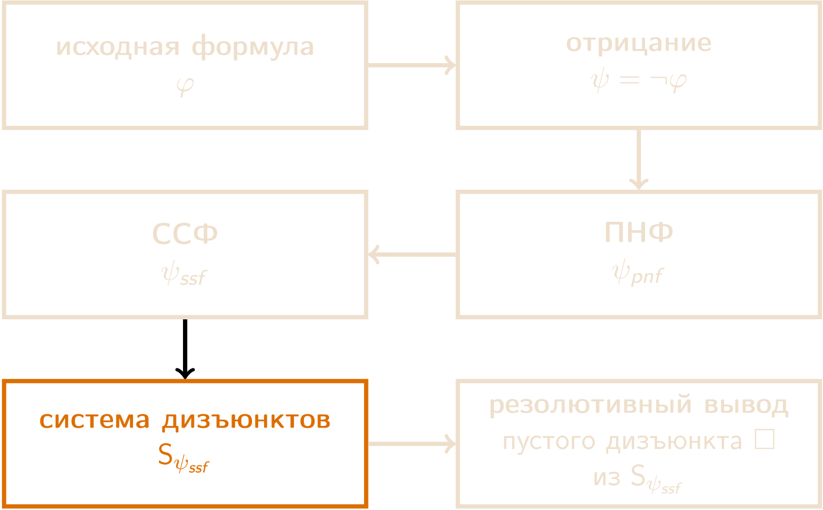
Системы дизъюнктов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр




$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$




$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

# Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k),$$

где $\mathsf{L}_i$ — литера (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k) = \mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с мультимножеством его литер:

$$\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k = \{\mathsf{L}_1, \dots, \mathsf{L}_k\}$$

# Системы дизъюнктов

**Например:** (*но это **только** при обсуждении дизъюнктов*)

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c})))$$

$$=$$

$$\mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c}))$$

$$=$$

$$\{\mathrm{P}(\mathtt{x}), \mathrm{P}(\mathtt{x}), \mathrm{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c}))\}$$

$$=$$

$$\mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c})) \vee \mathrm{P}(\mathtt{x})$$

$$=$$

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c})) \vee \mathrm{P}(\mathtt{x}))$$

# Системы дизъюнктов

Пустой дизъюнкт $\square$ — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k \text{ «}\sim\text{» } \mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k \vee \mathbb{f}, \text{ а значит, } \square \text{ «}\sim\text{» } \mathbb{f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) **множество** дизъюнктов

Система дизъюнктов $S$ выполнима ($|\models S$[1]),
если она имеет хотя бы одну модель,
и невыполнима ($|\not\models S$) иначе

1 Как и раньше, это обозначение не встречается за пределами слайдов лекций

# Системы дизъюнктов

**Утверждение.** $\forall \mathtt{x}\,(\varphi \,\&\, \psi) \sim \forall \mathtt{x}\,\varphi \,\&\, \forall \mathtt{x}\,\psi$

Доказательство. Очевидно?

(*Обосновать эту равносильность настолько же просто, как и все основные равносильности*)

**Теорема (о переходе к дизъюнктам)**

**Для ССФ с любым набором множителей $\mathsf{D}_1, \dots, \mathsf{D}_k$ верно:**

$$|\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,(\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k) \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \{\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_1, \dots, \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_k\}$$

Доказательство

По утверждению выше, $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,(\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k) \sim \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_k$

Следовательно, с учётом семантики $\&$,

$|\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,(\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k)$

$\Leftrightarrow\ |\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_k$

$\Leftrightarrow\ |\!\models \{\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_1, \dots, \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,\mathsf{D}_k\}$ ▼

# Системы дизъюнктов

**Пример:**

$$\not\models \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{u}\, (\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\neg \mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{g}(\mathtt{x})))\,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{\mathrm{P}(\mathtt{x}), \qquad \neg \mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{g}(\mathtt{x})), \qquad \neg \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u})\}$$