Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 22

Базовый алгоритм
проверки моделей для CTL

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Дано:

- Конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$
- Ctl-формула Φ

Требуется проверить справедливость соотношения $M \models \Phi$

То есть требуется проверить включение $S_0 \subseteq Sat(M, \Phi)$

Базовый алгоритм работает с явным представлением модели Крипке как размеченного ориентированного графа

Алгоритм будет описан как набор рекурсивно вызываемых процедур

Основная процедура $\mathfrak{P}_{MC}$, отвечающая алгоритму, устроена так

Дано: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$, ctl-формула Φ
Требуется проверить соотношение $M \models \Phi$

Устройство процедуры:

1. Вычислить множество $X = Sat(M, \Phi)$ при помощи описанной далее процедуры $\mathfrak{P}_{sat}$

2. Проверить включение $S_0 \subseteq X$

3. Вернуть результат проверки предыдущего пункта

Корректность основной процедуры обеспечивается

- определением выполнимости ctl-формулы на модели и
- обсуждающейся далее корректностью процедуры $\mathfrak{P}_{sat}$

Процедура $\mathfrak{P}_{sat}$

Дано: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$, ctl-формула Φ
Требуется вычислить множество $Sat(M, \Phi)$

Устройство процедуры:

1. Используя известные равносильности, преобразовать Φ в равносильную *упрощённую* формулу Ψ в базисе **EX**, **EG**, **EU**:
$$\Psi \ ::= \ \mathfrak{t} \ | \ p \ | \ \Psi \,\&\, \Psi \ | \ \neg\Psi \ | \ \mathbf{EX}\Psi \ | \ \mathbf{EG}\Psi \ | \ \mathbf{E}(\Psi\mathbf{U}\Psi)$$
2. $\mathfrak{P}_{sat}(M, \Phi) = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Psi)$
   - Процедура $\mathfrak{P}'_{sat}$ вычисления множества *Sat* для упрощённых формул будет описана дальше

Корректность этой процедуры обеспечивается равенством $Sat(M, \Phi) = Sat(M, \Psi)$, следующим из равносильности $\Phi \sim \Psi$

Процедура $\mathfrak{P}'_{sat}$

Дано: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$, *упрощённая* ctl-формула Φ

Требуется вычислить множество $Sat(M, \Phi)$

Устройство процедуры:

- Если $\Phi = \mathbb{t}$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = S$
- Если $\Phi = p \in \mathrm{AP}$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = \{s \mid s \in S,\ p \in L(s)\}$
- Если $\Phi = \Psi_1 \,\&\, \Psi_2$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Psi_1) \cap \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Psi_2)$
- Если $\Phi = \neg\Psi$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = S \setminus \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Psi)$
- Если $\Phi = \mathbf{EX}\Psi$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = \mathfrak{P}_{\mathbf{EX}}(M, \Psi)$
- Если $\Phi = \mathbf{EG}\Psi$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = \mathfrak{P}_{\mathbf{EG}}(M, \Psi)$
- Если $\Phi = \mathbf{E}(\Psi_1 \mathbf{U} \Psi_2)$, то $\mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi) = \mathfrak{P}_{\mathbf{EU}}(M, \Psi_1, \Psi_2)$

Корректность этой процедуры для первых четырёх пунктов очевидна (обеспечивается семантикой ctl-формул)

Осталось предложить подходящие процедуры $\mathfrak{P}_{\mathbf{EX}}$, $\mathfrak{P}_{\mathbf{EG}}$ и $\mathfrak{P}_{\mathbf{EU}}$

Для ориентированного графа Γ и его вершины v и множества вершин V записями $Pre(\Gamma, v)$ и $Pre(\Gamma, V)$ обозначим множество вершин, из которых достижимы по одной дуге соответственно вершина v и хотя бы одна вершина множества V:

$$Pre(v) = \{v' \mid (v \to v') \in \Gamma\}$$
$$Pre(V) = \bigcup_{v \in V} Pre(\Gamma, v)$$

Утверждение. **Для любой модели Крипке M и любой ctl-формулы Φ справедливо равенство** $Sat(M, \mathbf{EX}\Phi) = Pre(M, Sat(M, \Phi))$

Доказательство.

$s \in Sat(M, \mathbf{EX}\Phi)$
$\Leftrightarrow M, s \models \mathbf{EX}\Phi$
$\Leftrightarrow$ существует состояние s', такое что $s \to s'$ и $M, s' \models \Phi$
$\Leftrightarrow$ хотя бы одно состояние (s') множества $Sat(M, \Phi)$ достижимо из s по одной дуге
$\Leftrightarrow s \in Pre(Sat(M, \Phi))$ ▼

Процедура $\mathfrak{P}_{\mathbf{EX}}$

Дано: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$, *упрощённая* ctl-формула Φ
Требуется вычислить множество $Sat(M, \mathbf{EX}\Phi)$

Устройство процедуры:

1. Вычислить $X = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi)$
2. Вернуть множество $Pre(X)$

Корректность этой процедуры следует из

- последнего утверждения и
- предполагаемой (*по индукции*) корректности процедуры $\mathfrak{P}'_{sat}$

Утверждение. **Для любых конечной модели Крипке M, состояния s и ctl-формул Φ_1, Φ_2 верно следующее:**
$s \in Sat(M, \mathbf{E}(\Phi_1 \mathbf{U} \Phi_2)) \Leftrightarrow$ **в** M **существует путь** $s_1 \to \dots \to s_k$**, такой что** $s_1 = s$**,** $s_k \in Sat(M, \Phi_2)$ **и** $\{s_1, \dots, s_{k-1}\} \subseteq Sat(M, \Phi_1)$

Доказательство.

$s \in Sat(M, \mathbf{E}(\Phi_1 \mathbf{U} \Phi_2)$

$\Leftrightarrow M, s \models \mathbf{E}(\Phi_1 \mathbf{U} \Phi_2)$

$\Leftrightarrow$ существуют бесконечный путь π из s в M и момент времени k, такие что $M, \pi[k] \models \Phi_2$ и для любого момента времени i, меньшего k, верно $M, \pi[i] \models \Phi_1$

$\Leftrightarrow$ в M существует путь $s_1 \to \dots \to s_k$ $(\pi[1] \to \dots \to \pi[k])$, такой что $M, s_k \models \Phi_2$ и для всех $i \in \{1, \dots, k-1\}$ верно $M, s_i \models \Phi_1$

$\Leftrightarrow$ в M существует путь $s_1 \to \dots \to s_k$, такой что $s_k \in Sat(M, \Phi_2)$ и $\{s_1, \dots, s_{k-1}\} \subseteq Sat(M, \Phi_1)$ ▼

Процедура $\mathfrak{P}_{\mathsf{EU}}$

Дано: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$, *упрощённые* ctl-формулы Φ, Ψ

Требуется вычислить множество $Sat(M, \mathbf{E}(\Phi \mathbf{U} \Psi))$

Устройство процедуры:

1. Вычислить $Z = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Phi)$
2. Вычислить $X_0 = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \Psi)$
3. Последовательно вычислять множества $X_1, X_2, \dots$ по следующей схеме, пока для очередного вычисленного множества X_i не будет получено равенство $X_i = X_{i-1}$: $\qquad X_i = X_{i-1} \cup (Pre(X_{i-1}) \cap Z)$
4. Вернуть последнее вычисленное множество X_i

Корректность процедуры обосновывается

- последним утверждением,
- наблюдением «на грани очевидного» о том, что в множество X_i входят все вершины всех путей вида $s_1 \to \dots \to s_j$, где $j \leq i$, $s_j \in Sat(M, \Phi_2)$ и $\{s_1, \dots, s_{j-1}\} \subseteq Sat(M, \Phi_1)$, и
- гарантированным равенством $X_i = X_{i-1}$ хотя бы для одного i в связи с конечностью M

Утверждение. В конечном ориентированном графе Γ из вершины s исходит хотя бы один бесконечный путь $\Leftrightarrow$ в Γ из s достижима хотя бы одна нетривиальная компонента сильной связности

Доказательство этого утверждения несложно извлекается из теоремы о проверке пустоты автомата Бюхи

Для графа Γ и подмножества V его вершин записью $\Gamma|_V$ обозначим подграф графа Γ, порождённый множеством V:

- Множество вершин $\Gamma|_V$ — это V
- Дуга (s_1, s_2) входит в $\Gamma|_V \Leftrightarrow \{s_1, s_2\} \subseteq V$ и эта дуга входит в Γ
- Метки вершин и дуг переносятся из Γ в $\Gamma|_V$

Утверждение. **Для любой конечной модели Крипке M и любой ctl-формулы Φ верно следующее: $s \in Sat(M, \mathbf{EG}\Phi) \Leftrightarrow$ в графе $M|_{Sat(M,\Phi)}$ содержится вершина s и из неё достижима хотя бы одна нетривиальная компонента сильной связности**

Доказательство.

$s \in Sat(M, \mathbf{EG}\Phi) \Leftrightarrow M, s \models \mathbf{EG}\Phi$
$\Leftrightarrow$ в M существует бесконечный путь Φ, исходящий из s и такой что $M, \pi[i] \models \varphi$ для каждого момента времени i
$\Leftrightarrow$ в $\Gamma = M|_{Sat(M,\Phi)}$ существует бесконечный путь, исходящий из s
$\Leftrightarrow$ в Γ содержится s и из неё достижима хотя бы одна нетривиальная компонента сильной связности ▼

Процедура $\mathfrak{P}_{\mathbf{EG}}$

Дано: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$, *упрощённая* ctl-формула Φ

Требуется вычислить множество $Sat(M, \mathbf{EG}\Phi)$

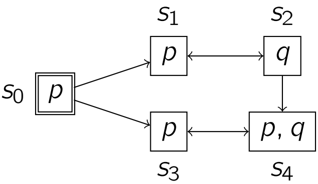
Устройство процедуры:

1. Вычислить множество $Z = Sat(M, \Phi)$
2. Вычислить граф $\Gamma = M|_Z$
3. Каким-либо известным эффективным алгоритмом вычислить множество X_0 всех вершин, входящих в какие-либо нетривиальные компоненты сильной связности графа Γ
4. Последовательно вычислять множества $X_1, X_2, \dots$ по следующей схеме, пока не будет получено равенство $X_i = X_{i-1}$:
$$X_i = X_{i-1} \cup Pre(\Gamma, X_{i-1})$$
5. Вернуть последнее вычисленное множество X_i

Корректность этой процедуры показывается аналогично корректности процедуры $Sat_{\mathbf{EU}}$

Пример

M:



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg \mathbf{E}(q\mathbf{U}\mathbf{EG}p)$$

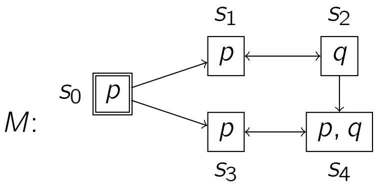
В процессе работы алгоритмом строятся следующие множества состояний

$$Sat(M, p) = \{s_0, s_1, s_3, s_4\}$$

$$Sat(M, \mathbf{EX}p) = \mathfrak{P}_{\mathbf{EX}}(M, p) = Pre(Sat(M, p)) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$$

$$Sat(M, q) = \{s_2, s_4\}$$

Пример



$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{U}\mathbf{EG}p)$

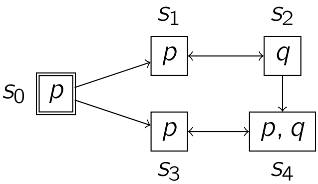
В процессе работы алгоритмом строятся следующие множества состояний

$Sat(M, \mathbf{EG}p) = \mathfrak{P}_{\mathbf{EG}}(M, p)$:

- $Z = Sat(M, p) = \{s_0, s_1, s_3, s_4\}$
- $X_0 = \{s_3, s_4\}$ (все вершины н.к.с.с. в $M|_Z$)
- $X_1 = X_0 \cup Pre(M|_X, X_0) = \{s_0, s_3, s_4\}$
- $X_2 = X_1 \cup Pre(M|_X, X_1) = X_1$
- $\mathfrak{P}_{\mathbf{EG}}(M, p) = X_2 = \{s_0, s_3, s_4\}$

Пример

M:



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{U}\mathbf{EG}p)$$

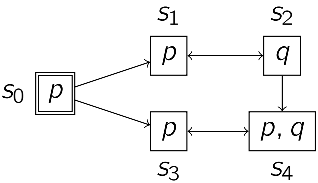
В процессе работы алгоритмом строятся следующие множества состояний

$Sat(M, \mathbf{E}(q\mathbf{U}\mathbf{EG}p)) = \mathfrak{P}_{\mathbf{EU}}(M, q, \mathbf{EG}p)$:

- $Z = Sat(M, q) = \{s_2, s_4\}$
- $X_0 = Sat(M, \mathbf{EG}p) = \{s_0, s_3, s_4\}$
- $X_1 = X_0 \cup (Pre(X_0) \cap Z) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$
- $X_2 = X_1 \cup (Pre(X_1) \cap Z) = X_1$
- $\mathfrak{P}_{\mathbf{EU}}(M, q, \mathbf{EG}p) = X_2 = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$

Пример

M:



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$$

В процессе работы алгоритмом строятся следующие множества состояний

$$Sat(M, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = S \setminus Sat(M, \mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = \{s_1\}$$

$$Sat(M, \varphi) = Sat(M, \mathbf{EX}p) \cap Sat(M, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = \emptyset$$

Так как $\{s_0\} \not\subseteq \emptyset$, можно заключить, что $M \not\models \varphi$

А какова сложность базового алгоритма относительно количества вершин и дуг в модели и количества операций в формуле?