Математическая логика

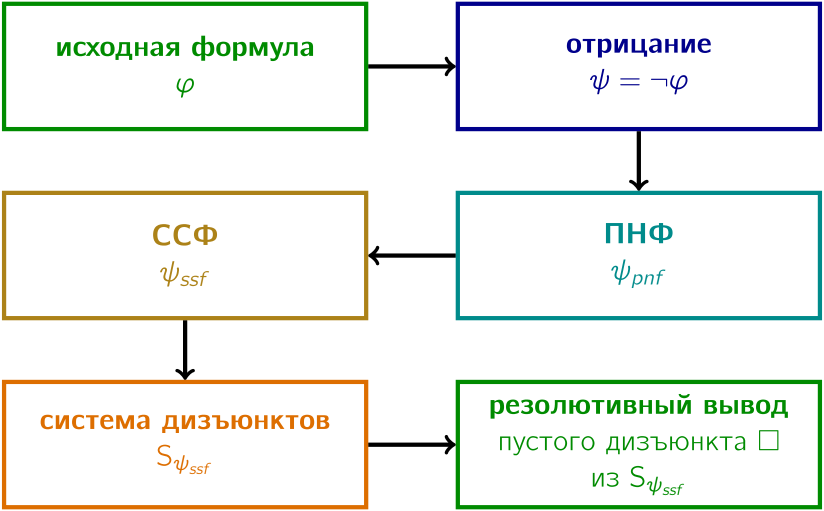
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 18

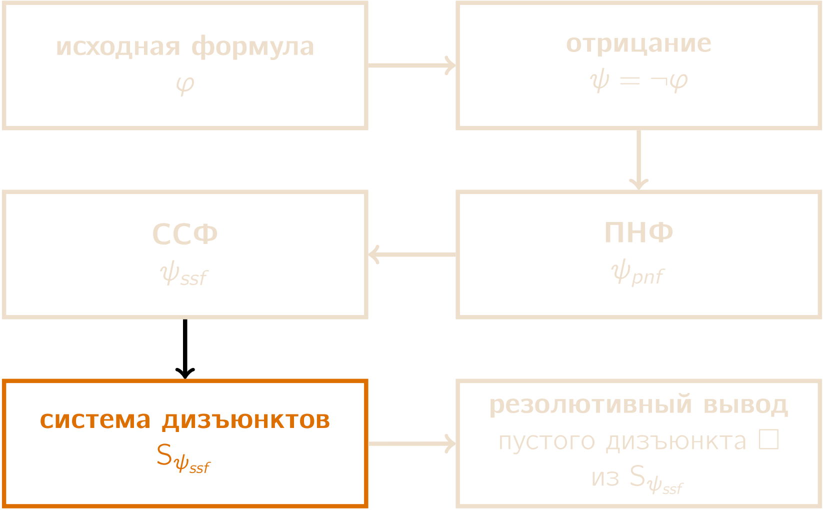
Системы дизъюнктов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (L_1 \vee \dots \vee L_k),$$

где L_i — литера (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (L_1 \vee \dots \vee L_k) = L_1 \vee \dots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с мультимножеством его литер:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например: (*но это* **только** *при обсуждении дизъюнктов*)

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P(x)} \vee \mathrm{P(x)} \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})))$$

$$=$$

$$\mathrm{P(x)} \vee \mathrm{P(x)} \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$$

$$=$$

$$\{\mathrm{P(x)}, \mathrm{P(x)}, \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$$

$$=$$

$$\mathrm{P(x)} \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{P(x)}$$

$$=$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P(x)} \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{P(x)})$$

Системы дизъюнктов

Пустой дизъюнкт $\Box$ — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k \text{ «}\sim\text{» } \mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k \vee \mathbb{f}, \text{ а значит, } \Box \text{ «}\sim\text{» } \mathbb{f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Система дизъюнктов S выполнима ($\models S$[1]),
если она имеет хотя бы одну модель,
и невыполнима ($\not\models S$) иначе

1 Как и раньше, это обозначение не следует использовать вне этого курса

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall x\,(\varphi \,\&\, \psi) \sim \forall x\,\varphi \,\&\, \forall x\,\psi$

Доказательство. Очевидно?

(*Обосновать эту равносильность настолько же просто,*
как и все основные равносильности)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)
Для ССФ с любым набором множителей $D_1, \ldots, D_k$ **верно:**

$$|\models \forall \widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k) \quad \Leftrightarrow \quad |\models \{\forall \widetilde{x}^n\, D_1, \ldots, \forall \widetilde{x}^n\, D_k\}$$

Доказательство

По утверждению выше, $\forall \widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k) \sim \forall \widetilde{x}^n\, D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \forall \widetilde{x}^n\, D_k$

Следовательно, с учётом семантики &,
$|\models \forall \widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$
$\Leftrightarrow\ |\models \forall \widetilde{x}^n\, D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \forall \widetilde{x}^n\, D_k$
$\Leftrightarrow\ |\models \{\forall \widetilde{x}^n\, D_1, \ldots, \forall \widetilde{x}^n\, D_k\}$ ▼

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\not\models \forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x, u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x), \qquad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \qquad \neg R(x, u)\}$$