

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 18

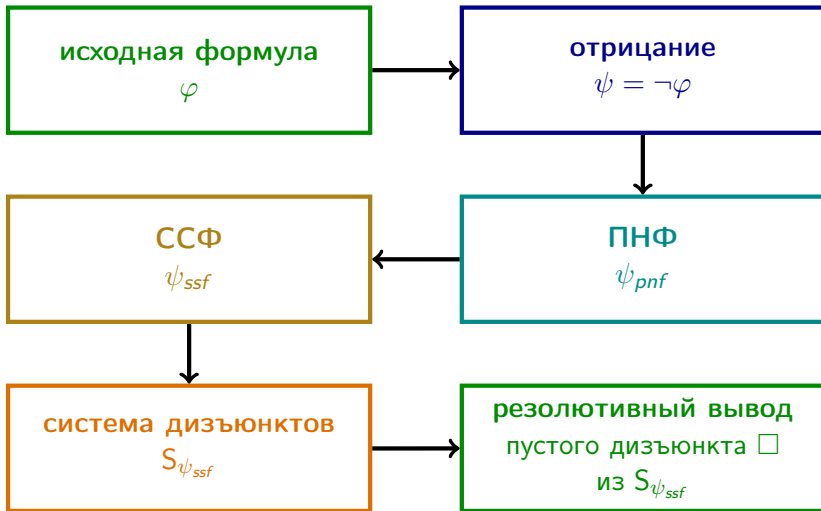
Сколемовская стандартная форма (ССФ)

Лектор:

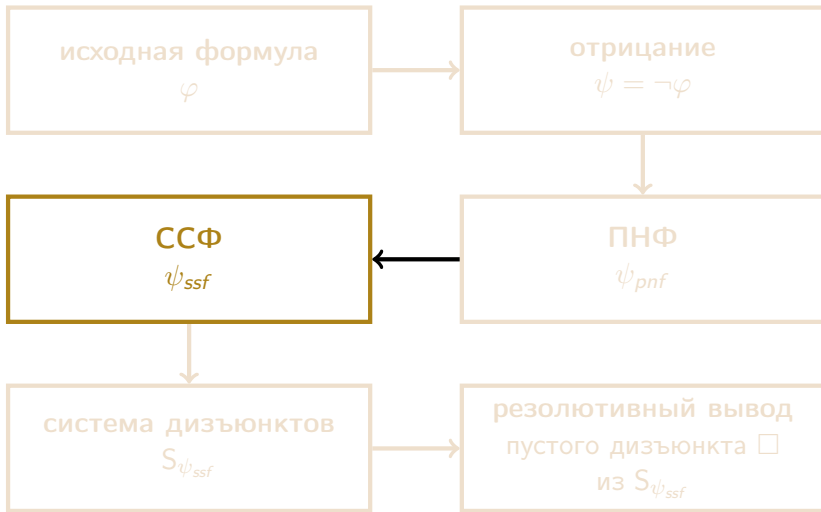
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf}$$

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в **сколемовской стандартной форме (ССФ)**, если

- ▶ она находится в предварённой нормальной форме и
- ▶ её кванторная приставка не содержит кванторов \exists :

$$\forall \widehat{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

Например, формула

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с «находится в ССФ» будем говорить «является ССФ»

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ в настолько же (не)выполнимую ССФ

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Небольшая вольность: если слева от \exists не стоит ни одного \forall , то, согласно лемме, f — **0-местный функциональный символ**, то есть константа, и ψ подстановка в условии леммы имеет вид

$$\chi\{x_{n+1}/f\}$$

Доказательство. (\Leftarrow)

Рассмотрим произвольную модель \mathcal{I} для формулы $\forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$

По семантике « \forall », для любого набора предметов \tilde{d}^n верно

$$\mathcal{I} \models \chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, \bar{f}(\tilde{d}^n)]$

По семантике « \exists », верно $\mathcal{I} \models (\exists x_{n+1} \chi)[\tilde{d}^n]$

По семантике « \forall », так как набор предметов \tilde{d}^n произволен,

верно и $\mathcal{I} \models \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Доказательство. (\Rightarrow)

Рассмотрим произвольную модель \mathcal{I} для формулы φ

По семантике « \forall » и « \exists », для любого набора предметов \tilde{d}^n существует предмет d_{n+1} , такой что $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, d_{n+1}]$

По \mathcal{I} построим **новую** интерпретацию \mathcal{J} :

если в сигнатуре был функциональный символ f , удалим его
добавим в сигнатуру функциональный символ $f^{(n)}$
оценим f так, чтобы выполнялось равенство $\bar{f}(\tilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi[\tilde{d}^n, \bar{f}(\tilde{d}^n)]$, а значит, и $\mathcal{J} \models \chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$

По семантике « \forall », так как набор предметов \tilde{d}^n произволен,
верно и $\mathcal{J} \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$ ▼

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Устранение квантора \exists с введением новых символов с целью получить более простую «хорошую» формулу обычно называют **сколемизацией** (здесь «хорошая» — *сохраняющая выполнимость и невыполнимость*)

При устранении \exists на место удаляемой переменной подставляются **сколемовские термы** (здесь — $f(\tilde{x}^n)$)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \iff Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор \exists , самый левый \exists удаляется при помощи подстановки сколемовского термина:

$$\varphi_{pnf} = \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots \chi$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots (\chi\{x_k/f_1(x_1, \dots, x_{k-1})\})$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \dots$$
$$(\chi\{x_k/f_1(x_1, \dots, x_{k-1}), x_m/f_2(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{m-1})\})$$

...

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно (!)** при удалении очередного \exists

каждый раз выбирать **новый** функциональный символ:

не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений

Алгоритм сколемизации ПНФ

Пример:

$\exists u \exists v \forall w \exists x \forall y \exists z (P(u, v) \& P(v, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, u))$

$\exists v \forall w \exists x \forall y \exists z (P(c, v) \& P(v, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, c))$

$\forall w \exists x \forall y \exists z (P(c, d) \& P(d, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, c))$

$\forall w \forall y \exists z (P(c, d) \& P(d, w) \& P(w, f(w)) \& P(f(w), y) \& P(y, z) \& P(z, c))$

$\forall w \forall y (P(c, d) \& P(d, w) \& P(w, f(w)) \& \\ P(f(w), y) \& P(y, g(w, y)) \& P(g(w, y), c))$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- ▶ **c** — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- ▶ **d** — любая константа, кроме c
- ▶ **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- ▶ **g** — любой функциональный символ местности 2 (ни один не содержится в формуле)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Другой пример:

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- ▶ **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- ▶ **g** — любой функциональный символ местности 1, кроме f

Алгоритм сколемизации ПНФ

Теорема (о сколемизации)

Если φ_{pnf} — ПНФ,

то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов \exists (по одному) согласно алгоритму сколемизации ($\psi_1 = \varphi_{pnf}$, $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$)

По лемме об удалении квантора \exists , справедливы равносильности

$$\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_2 \quad \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \quad \models Sk(\varphi_{pnf}) \quad \blacktriangledown$$

А если в формулировке теоремы заменить «выполнима» (\models) на «общезначима» (\vDash), останется ли она справедливой?