Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

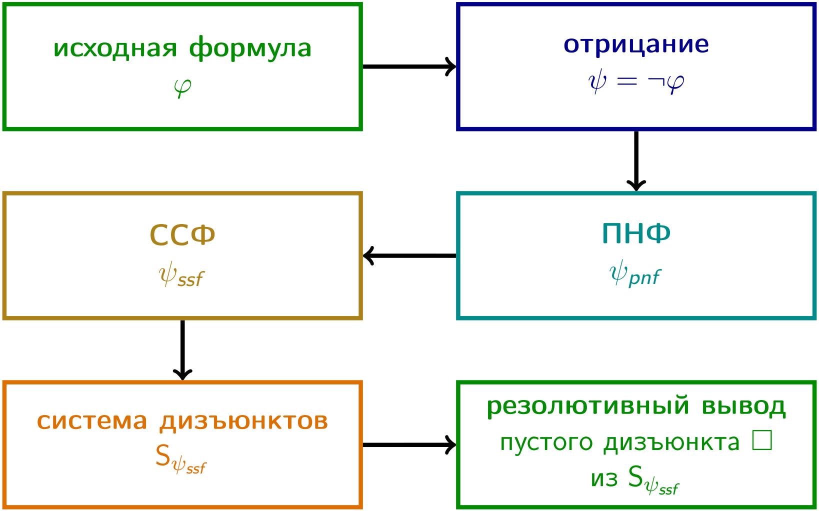
Блок 18

Системы дизъюнктов

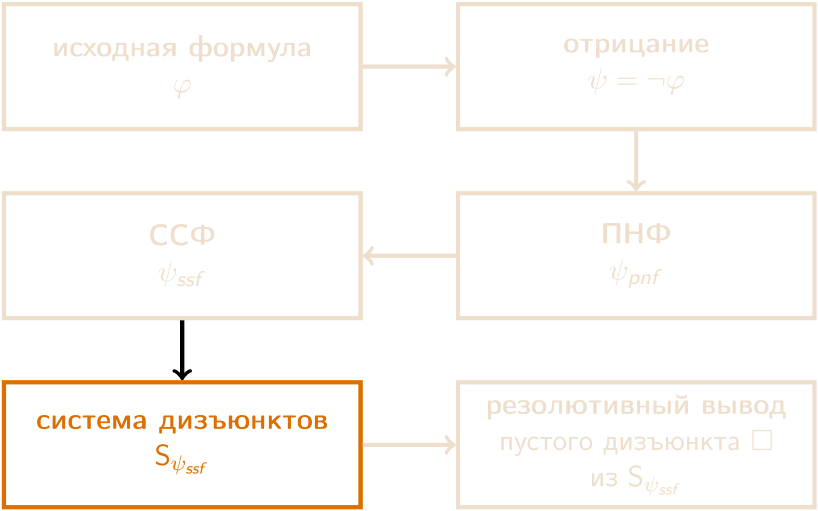
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (L_1 \vee \dots \vee L_k),$$

где L_i — *литера* (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (L_1 \vee \dots \vee L_k) = L_1 \vee \dots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с *мультимножеством* его литер:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например: (*но это **только** при обсуждении дизъюнктов*)

$$\forall x\ (P(x) \vee P(x) \vee Q(\mathsf{f}(\mathsf{c})))$$

$$=$$

$$P(x) \vee P(x) \vee Q(\mathsf{f}(\mathsf{c}))$$

$$=$$

$$\{P(x), P(x), Q(\mathsf{f}(\mathsf{c}))\}$$

$$=$$

$$P(x) \vee Q(\mathsf{f}(\mathsf{c})) \vee P(x)$$

$$=$$

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(\mathsf{f}(\mathsf{c})) \vee P(x))$$

Системы дизъюнктов

Пустой дизъюнкт $\square$ — это особый дизъюнкт, отождествляемый с пустым множеством литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$\mathsf{L}_1 \vee \cdots \vee \mathsf{L}_k \text{ “}\sim\text{” } \mathsf{L}_1 \vee \cdots \vee \mathsf{L}_k \vee \mathbb{f}, \text{ а значит, } \square \text{ “}\sim\text{” } \mathbb{f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) **множество** дизъюнктов

Система дизъюнктов S выполнима ($\Vert\!\models S$)[1],
если она имеет хотя бы одну модель,
и невыполнима ($\Vert\!\not\models S$) иначе

[1] Как и раньше, это обозначение не встречается за пределами слайдов лекций

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall \mathrm{x}\ (\varphi \,\&\, \psi) \sim \forall \mathrm{x}\ \varphi \,\&\, \forall \mathrm{x}\ \psi$

Доказательство. Очевидно?

(*Обосновать эту равносильность настолько же просто, как и все основные равносильности*)

Теорема(*о переходе к дизъюнктам*)

Для ССФ с любым набором множителей $D_1, \dots, D_k$ **верно:**

$$\| \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k) \quad \Leftrightarrow \quad \| \models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_1, \dots, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_k\}$$

Доказательство.

По *утверждению выше*, $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k) \sim \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_k$

Следовательно, (*с учётом семантики* &)

$\| \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$

$\Leftrightarrow \| \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_k$

$\Leftrightarrow \| \models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_1, \dots, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ D_k\}$ ▼

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\not\models \forall x \, \forall u \, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x, u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x), \qquad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \qquad \neg R(x, u)\}$$