Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 19

Неразрешимость основных проблем
для стандартных схем программ

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Теорема. Проблема пустоты для двоичных двухголовочных автоматов m-сводится к проблеме пустоты для стандартных схем программ

Доказательство. Достаточно показать, как по произвольному двоичному двухголовочному автомату $\mathcal{D} = (Q_1, Q_2, q_f, q_0, T)$ построить схему программ $\pi_\mathcal{D}$, такую что

$$\text{автомат } \mathcal{D} \text{ пуст} \quad \Leftrightarrow \text{схема } \pi_\mathcal{D} \text{ пуста}$$

По теореме о моделировании стандартных схем программ системами переходов, достаточно показать, как построить не схему $\pi_\mathcal{D}$, а систему переходов $S_\mathcal{D} = LTS(\pi_\mathcal{D})$

Система будет строиться в сигнатуре $\langle \emptyset, \{\mathbf{f}^{(1)}\}, \{\mathrm{P}^{(1)}\}\rangle$

В ней будут использоваться две переменные: x_1, x_2 — отвечающие двум головкам автомата

Терм $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\ldots\mathbf{f}(\mathrm{x})\ldots))$, в котором символ $\mathbf{f}$ записан k раз, будем обозначать записью $t^k(\mathrm{x})$

Доказательство. $(\mathcal{D} = (Q_1, Q_2, q_f, q_0, T) \to S_{\mathcal{D}})$

Устроим систему $S_{\mathcal{D}}$ так

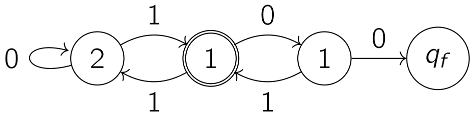
Каждое состояние $q \in Q_j$ добавим в $S_{\mathcal{D}}$ как $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{x}_j)}$

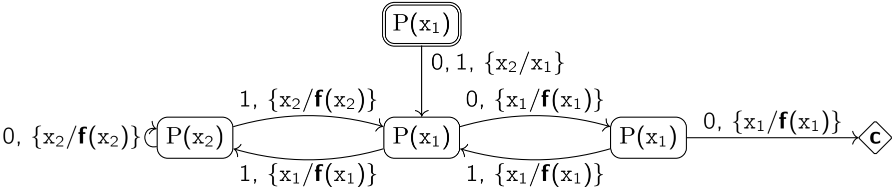
Заключительное состояние автомата добавим в $S_{\mathcal{D}}$ как выход $\diamond\!\mathbf{c}$

Для кадого перехода $q \xrightarrow{b} p$ в $\mathcal{D}$, где $q \in Q_j$, добавим в $S_{\mathcal{D}}$ переход $q \xrightarrow{b, \{\mathrm{x}_j / f(\mathrm{x}_j)\}} p$

Добавим в $S_{\mathcal{D}}$ начальную вершину $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{x}_2)}$ и переходы из неё $\xrightarrow{b, \{\mathrm{x}_2/\mathrm{x}_1\}} q_0$

Пример автомата и соответствующей системы переходов:





Доказательство. $(\mathcal{D} = (Q_1, Q_2, q_f, q_0, T) \to S_{\mathcal{D}})$

Двоичному слову $w = b_1 \dots b_n$ сопоставим эрбрановскую интерпретацию $\mathcal{I}_w$, устроенную так: $\overline{\mathrm{P}}(t^k(\mathbf{c}_{\mathrm{x}_1})) = b_{k+1}$

Эрбрановской интерпретации $\mathcal{I}$ и неотрицательному целому числу n сопоставим слово $w_{\mathcal{I}} = \overline{P}(t^0(\mathbf{c}_{x_1})) \dots \overline{P}(t^{n-1}(\mathbf{c}_{x_1}))$

Тогда, по построению $S_{\mathcal{D}}$ и поставленному соответствию, вычисление автомата $\mathcal{D}$ на входном слове w

$$(q_1, v_1, w_1), (q_2, v_2, w_2), (q_3, v_3, w_3), \dots$$

с последовательным чтением букв $b_1, b_2, b_3, \dots$ отвечает эрбрановскому вычислению системы $S_{\mathcal{D}}$ в интерпретации $\mathcal{I}_w$, реализующему путь

$$\circledcirc \xrightarrow{\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c}_{\mathrm{x}_2})} q_1 \xrightarrow{b_1} q_2 \xrightarrow{b_2} q_3 \xrightarrow{b_3} \dots$$

И наоборот, указанное вычисление системы переходов в эрбрановской интерпретации $\mathcal{I}$ отвечает вычислению автомата на слове $w_{\mathcal{I}}$, проходящему через те же состояния

Значит, автомат $\mathcal{D}$ принимает хотя бы одно слово тогда и только тогда, когда вычисление $S_{\mathcal{D}}$ конечно хотя бы в одной эрбрановской интерпретации ▼

Следствие. Проблема пустоты для стандартных схем программ неразрешима

Следствие. Проблема функциональной эквивалентности для стандартных схем программ неразрешима

Для размышлений: докажите, что проблема свободы для стандартных схем программ неразрешима, m-сведя к ней проблему соответствий Поста