Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 46

Интуиционистская логика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

Интуиционизм — это философское и математическое течение, возникшее в начале XX века как ответ на чересчур широкое и вольное использование формальных логических методов и использование «нереальных» бесконечных объектов в математических рассуждениях

Сжато и упрощённо можно представить основную мысль интуиционистского взгляда на математику так:

- Чтобы утверждение было признано истинным, требуется «убедительное» «конструктивное» доказательство этого утверждения
- В частности, если утверждается существование некоего конструкта, то доказательством должен предоставляться способ его «наглядного» «конструктивного» построения
- Все остальные доказательства — это и не доказательства вовсе, а просто словоблудие

Вступление

Как и ряд других «радикальных» течений, существовавших в начале XX века, интуиционизм

- не сохранился в современной математике «в чистом виде»,
- но внёс свой вклад в устройство математики в целом
- и в упрощённом переосмысленном виде сохранился в виде особого логического языка, основанного на
  - необычном (неклассическом) спектре логических законов
  - и соответствующем необычном понимании истинности утверждений

Этот язык и известен сейчас под названием «интуиционистская логика»

Вступление

Пример того, что современные математики считают корректным доказательством, а интуиционисты считали словоблудием:

- Существуют иррациональные чи́сла α и β, такие что α^β — рациональное число:
  - Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рациональное число, то $\alpha = \beta = \sqrt{2}$
  - Иначе $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $\beta = \sqrt{2}$ (т.к. $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$)

Эти слова звучат достаточно убедительно и склоняют к тому, чтобы поверить, что заявленные чи́сла α и β действительно существуют

Но чему же всё-таки равны α и β?

По мнению интуиционистов, пока не показано, как можно представить себе эти чи́сла при помощи конструктивных умозаключений, утверждение об их существовании — это всего лишь не вполне аргументированная попытка убедить собеседника в своей правоте, которая не может считаться абсолютной истиной

Семантика Колмогорова-Брауэра-Гейтинга

Рассмотрим интуиционистскую логику высказываний, и в связи с этим формулами языка будем считать формулы логики высказываний:

$$\varphi \ ::= \ \mathtt{x} \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg \varphi),$$

где φ — формула, $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$ и Var — множество пропозициональных переменных

Попробуем переосмыслить эти формулы так:

- Каждая переменная отвечает некоторой атомарной *задаче*
- Истинность переменной означает, что в нашем распоряжении имеется решение соответствующей задачи
  - (И не просто утверждение о том, что решение существует, а именно само решение — например, явное описание алгоритма)
- Составные формулы отвечают составным задачам, конструирующимся из более простых при помощи способов, задаваемых связками
- Истинность составных формул означает, что в нашем распоряжении имеется решение соответствующей составной задачи

Семантика Колмогорова-Брауэра-Гейтинга

Составная задача	*Для решения этой составной задачи требуется ...*
$\varphi \,\&\, \psi$	предъявить решение каждой из подзадач φ, ψ
$\varphi \vee \psi$	выбрать одну из подзадач φ, ψ и предъявить её решение
$\varphi \to \psi$	предъявить *сведе́ние* задачи ψ к задаче φ, то есть решение задачи ψ в предположении о том, что в нашем распоряжении имеется решение задачи φ
$\neg\varphi$	доказать, что задача φ не имеет решения

Формула считается законом интуиционистской логики (*общезначимой*), если она отвечает составной задаче, имеющей решение независимо от наличия решений атомарных задач

Семантика Колмогорова-Брауэра-Гейтинга

Примеры законов интуиционистской логики

- $\varphi \to \varphi$: каждую задачу можно тривиально свести к ней самой
- $(\varphi \to \psi) \& (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$: чтобы свести задачу χ к задаче φ, достаточно найти задачу ψ, такую что к ней сводится χ и она сводится к φ
- $\varphi \to \neg\neg\varphi$: чтобы доказать, что не существует доказательства того, что задача не имеет решения, достаточно предъявить решение этой задачи
- $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \& \psi)$: чтобы доказать, что не невозможно одновременно решить обе задачи φ, ψ, достаточно выбрать одну из этих задач и доказать, что она не имеет решения

Семантика Колмогорова-Брауэра-Гейтинга

Примеры формул, не являющихся законами интуиционистской логики

Вообще говоря, не является верным следующее:

- $\neg\neg\varphi \to \varphi$: чтобы получить решение задачи, достаточно доказать, что не существует доказательства того, что эта задача не имеет решения
- $\varphi \vee \neg\varphi$: для любой задачи мы располагаем либо решением, либо доказательством того, что решение не существует
- $\neg(\varphi \,\&\, \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$: чтобы предъявить доказательство отсутствия решения для хотя бы одной из задач φ, ψ, достаточно доказать, что невозможно решить эти две задачи одновременно

Семантика Колмогорова-Брауэра-Гейтинга

Чтобы все предложенные примеры и построения не оказались таким же словоблудием, как и то, ради устранения чего они придумывались, следует строго и непротиворечиво определить семантику формул так, чтобы она соответствовала общим представлениям о наличии и отсутствии решений разнообразных задач

Чтобы лучше понять такую семантику, представим себе то, как идеальный математик может учиться решать атомарные (элементарные, интересующие его) задачи:

- В каждый момент времени он
  - умеет решать некоторые атомарные задачи,
  - не умеет решать остальные атомарные задачи
  - и точно знает, что он умеет решать, а что нет
- Его умения изменяются со временем:
  - он может научиться решать ту задачу, которую не умел решать,
  - но может и не научиться,
  - и совершенно точно он никогда не разучится решать те задачи, которые научился решать

Интуиционистская модель Крипке

Пояснения про идеального математика наводят на мысль, что семантика формул может быть основана на понятиях модальной логики

Это действительно так, и это один из наиболее популярных способов задания семантики интуиционистских формул

Шкалу Крипке $\mathcal{F} = (W, \preceq)$ будем называть интуиционистской, если отношение $\preceq$ является нестрогим частичным порядком:

- рефлексивно, транзитивно и
- антисимметрично: для любых миров w_1, w_2 верна импликация
$$w_1 \preceq w_2 \text{ и } w_2 \preceq w_1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_2$$

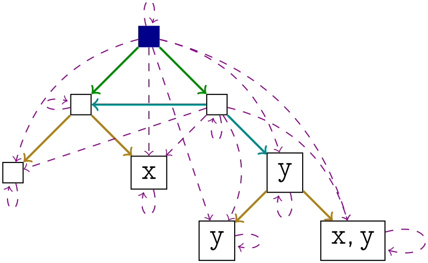
Интуиционистская интерпретация — это модель Крипке $(W, \preceq, L)$, для которой верно следующее:

- $(W, \preceq)$ — интуиционистская шкала Крипке
- оценка L монотонна: для любых миров w_1, w_2 и любой переменной x верна импликация
$$\mathrm{x} \in L(w_1) \text{ и } w_1 \preceq w_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} \in L(w_2)$$

Интуиционистская модель Крипке

Пример интуиционистской интерпретации над переменными

- x: умею доказывать в натуральном исчислении
- y: умею доказывать теорему Чёрча



Начало семестра

Пошёл на лекцию по теореме Чёрча либо прогулял её

Проспал эту лекцию либо слушал внимательно

Независимо от лекции, участвовал в семинарах либо нет

Плюс рефлексивность и транзитивность (такие переходы в остальных примерах будут опускаться)

Интуиционистское отношение выполнимости

Выполнимость формулы φ интуиционистской логики в мире w интерпретации $\mathcal{I} = (W, \preceq, L)$ $(\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi)$ задаётся так:

- $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \mathtt{x}$, где $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathtt{x} \in L(w)$
- $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi \,\&\, \psi$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \psi$
- $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi \vee \psi$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \psi$
- $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \neg\varphi$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ для любого состояния $\mathtt{w}'$, такого что $w \preceq w'$, верно $\mathcal{I}, w' \not\models_{\mathtt{i}} \varphi$
  - Относительно семантики К.-Б.-Г.: в модели принципиально невозможно приобрести такие умения, которые позволят решить φ
- $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi \to \psi$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ для любого состояния $\mathtt{w}'$, такого что $w \preceq w'$ и $\mathcal{I}, w' \models_{\mathtt{i}} \varphi$, верно и $\mathcal{I}, w' \models_{\mathtt{i}} \psi$
  - Относительно семантики К.-Б.-Г.: согласно модели принципиально невозможно приобрести такой набор умений, чтобы научиться решать задачу φ и при этом не научиться решать ψ

Формула φ интуиционистски общезначима $(\models_{\mathtt{i}} \varphi)$, если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любого её мира w верно $\mathcal{I}, w \models_{\mathtt{i}} \varphi$

Свойства интуиционистской логики

Утверждение. **Для любой переменной** $\mathtt{x}$ **верно** $\not\models_{\mathfrak{i}} \mathtt{x} \vee \neg\mathtt{x}$

Доказательство.

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I} = (\{w_1, w_2\}, \preceq, L)$ над $\{\mathtt{x}, \dots\}$:

$$\begin{tikzcd} \text{(\textit{ленюсь и отдыхаю})}\ \overset{w_1}{\square} \arrow[r] & \overset{w_2}{\boxed{\mathtt{x}}}\ \text{(\textit{сходил на лекцию})} \end{tikzcd}$$

- $\mathtt{x} \notin L(w_1)$
  - По семантике $\mathtt{x}$: $\mathcal{I}, w_1 \not\models_{\mathfrak{i}} \mathtt{x}$
- $\mathtt{x} \in L(w_2)$
  - По семантике $\mathtt{x}$: $\mathcal{I}, w_2 \models_{\mathfrak{i}} \mathtt{x}$
  - По семантике $\neg$ и соотношению $w_1 \preceq w_2$, верно $\mathcal{I}, w_1 \not\models_{\mathfrak{i}} \neg\mathtt{x}$

Значит, по семантике $\vee$, верно $\mathcal{I}, w_1 \not\models_{\mathfrak{i}} \mathtt{x} \vee \neg\mathtt{x}$ ▼

Свойства интуиционистской логики

Утверждение. Для любой переменной x верно $\models_{\mathrm{i}} \mathrm{x} \to \neg\neg \mathrm{x}$

Доказательство. Предположим *от противного*, что существуют интерпретация $\mathcal{I} = (W, \preceq, L)$ и мир w, такие что $\mathcal{I}, w \not\models_{\mathrm{i}} \mathrm{x} \to \neg\neg \mathrm{x}$

Тогда верно следующее:

1. Существует мир w_1, такой что $w \preceq w_1$ и, кроме того,
   1.1 $\mathcal{I}, w_1 \models_{\mathrm{i}} \mathrm{x}$ и
   1.2 $\mathcal{I}, w_1 \not\models_{\mathrm{i}} \neg\neg \mathrm{x}$ (по семантике $\to$)
2. $\mathrm{x} \in L(w_1)$ (по (1.1) и семантике x)
3. Существует мир w_2, такой что
   3.1 $w_1 \preceq w_2$ и
   3.2 $\mathcal{I}, w_2 \models \neg \mathrm{x}$ (по (1.2) и семантике $\neg$)
4. Для любого мира w_3, такого что $w_2 \preceq w_3$, верно $\mathcal{I}, w_3 \not\models_{\mathrm{i}} \mathrm{x}$ (по (3.2) и семантике $\neg$)
5. $\mathcal{I}, w_2 \not\models_{\mathrm{i}} \mathrm{x}$ (по (4) и рефлексивности отношения $\preceq$)
6. $\mathrm{x} \notin L(w_2)$ (по (5) и семантике x)
7. $\mathrm{x} \in L(w_2)$ (по (2), (3.1) и монотонности L), что *противоречит* (6) ▼

Свойства интуиционистской логики

Чтобы дать общее впечатление о свойствах интуиционистской логики, но не тратить чрезмерно много времени на детали, сформулируем напоследок несколько примечательных утверждений об интуиционистской логике без доказательства

Кто заинтересовался, тот может попробовать доказать всё это сам

Утверждение. **Для любых различных переменных x и y верно:**

$$\not\models_i \neg\neg x \to x$$
$$\not\models_i \neg(x \,\&\, y) \to (\neg x \vee \neg y)$$
$$\not\models_i \neg(x \vee y) \to (\neg x \,\&\, \neg y)$$

Утверждение. **Для любых различных переменных x, y верно:**

$$\models_i \neg\neg\neg x \to \neg x$$
$$\models_i (\neg x \vee \neg y) \to \neg(x \,\&\, y)$$
$$\models_i \neg x \vee \neg\neg x$$

Свойства интуиционистской логики

Утверждение. **Для любых формулы φ, интерпретации $\mathcal{I} = (W, \preceq, L)$ и миров w_1, w_2 верно:**

$$\mathcal{I}, w_1 \models \varphi \text{ и } w_1 \preceq w_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}, w_2 \models \varphi$$

Утверждение. **Для любой формулы φ, такой что $\models_{\mathfrak{i}} \varphi$, верно и $\models \varphi$ в логике высказываний**

Утверждение. **Для любых формул φ и ψ верно:**

$$\models_{\mathfrak{i}} \varphi \vee \psi \quad \Rightarrow \quad \models_{\mathfrak{i}} \varphi \text{ или } \models_{\mathfrak{i}} \psi$$