Лекция 11. Раскраски. Эквивалентность раскрасок относительно группы перестановок. Теорема Пойа (частный случай). Производящие функции. Перечисляющий ряд для фигур и перечисляющий ряд для функций. Теорема Пойа (общий случай). Примеры.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Избранным вопросам дискретной математики”.
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mathcyb.cs.msu.su

Раскраски

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество цветов.

Раскраской элементов множества N в m цветов называется отображение

$$f : N \to M.$$

Множество всех раскрасок элементов множества N в m цветов обозначим как $map(N, M)$.

Теорема 1. $|map(N, M)| = m^n$.

Эквивалентность раскрасок

Пусть G – подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Определим бинарное отношение R_G на множестве $map(N, M)$: если $f, g \in map(N, M)$, то

$$f \ R_G \ g \Leftrightarrow \exists \pi \in G : \forall x \in N \ g(x) = f(\pi(x)).$$

Эквивалентность раскрасок

Теорема 2. *Отношение R_G является отношением эквивалентности на множестве $map(N, M)$.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждой раскраски $f(x) \in map(N, M)$ выберем $\pi_1 = e \in G$ – тождественную перестановку. Тогда $f(\pi_1(x)) = f(x)$ для каждого $x \in N$, поэтому $fR_G f$.

2) Симметричность. Пусть для раскрасок $f(x), g(x) \in map(N, M)$ верно $fR_G g$, т.е. найдется такая перестановка $\pi \in G$, что $g(x) = f(\pi(x))$ для каждого $x \in N$. Тогда

$$g(x) = f(\pi(x)),\ g(\pi^{-1}(x)) = f(\pi^{-1}(\pi(x))),\ g(\pi^{-1}(x)) = f(x).$$

Т.к. G – группа, $\pi^{-1} \in G$, откуда $gR_G f$.

Эквивалентность раскрасок

Доказательство (продолжение).

3) Транзитивность. Пусть для раскрасок $f(x), g(x), h(x) \in map(N, M)$ верно $fR_G g$ и $gR_G h$, т.е. найдутся такие перестановки $\pi_1 \in G$ и $\pi_2 \in G$, что $g(x) = f(\pi_1(x))$ и $h(x) = g(\pi_2(x))$. Тогда

$$f((\pi_2 \circ \pi_1)(x)) = f(\pi_1(\pi_2(x)) = g(\pi_2(x)) = h(x).$$

Т.к. G – группа, $\pi_2 \circ \pi_1 = \pi \in G$, откуда $fR_G h$.

$\square$

Эквивалентность раскрасок

Отношение эквивалентности R_G обозначается как $\sim_G$.

Если для раскрасок $f, g \in map(N, M)$ верно $f \sim_G g$, то говорят, что раскраски f и g *эквивалентны по группе* G (или *относительно группы* G).

Пример: раскраски вершин правильного треугольника

Пример. Рассмотрим раскраски вершин правильного треугольника в два цвета: красный и синий.
Тогда раскраски

$$f : 1 \to \text{красный}, \; 2, 3 \to \text{синий},$$

и

$$g : 3 \to \text{красный}, \; 1, 2 \to \text{синий},$$

эквивалентны относительно группы H вращений правильного треугольника в плоскости, т.к. для перестановки $\pi = (123) \in H$ верно $f(\pi(x)) = g(x)$.
А раскраски f и

$$h : 1, 2 \to \text{красный}, \; 3 \to \text{синий},$$

неэквивалентны относительно группы H. Почему?

Орбита раскраски

Для раскраски $f \in map(N, M)$ ее *орбитой* в группе G называется класс эквивалентности этой раскраски по отношению эквивалентности $\sim_G$.

Обозначение: O_f,

$$O_f = \{\pi \in G \mid f(\pi(x))\}.$$

Число различных орбит (относительно группы G) – это число неэквивалентных раскрасок (относительно группы G).

В каких случаях возникают такие задачи?

Подсчет числа ожерелий

Задача подсчета **числа ожерелий**.

Сколько различных ожерелий можно составить из n бусин m цветов?
Два ожерелья считаются **одинаковыми**, если одно из них получается из другого вращением в плоскости (без зеркальных отражений).

Эта задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин правильного n-угольника в m цветов относительно группы G вращения этого n-угольника в плоскости.

Классификация булевых функций

Задача подсчета **числа классов эквивалентностей булевых функций**.

Сколько есть различных булевых функций, зависящих от n переменных, каждая из которых **не может быть получена** из другой навешиванием отрицаний над переменными?

Например, пусть $n = 2$. Тогда булевы функции

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } g(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1 \bar{x}_2$$

могут быть получены одна из другой навешиванием отрицаний над переменными, а булевы функции

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } h(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

не могут (почему?).

Классификация булевых функций

Заметим, что каждая булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определяет на кубе B^n **раскраску** его вершин **в два цвета**: 0 и 1.

Поэтому задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин булева куба B^n в 2 цвета (0 или 1) относительно некоторой группы перестановок G, $G \subseteq S_{2^n}$, вершин куба B^n.

Эта группа перестановок вершин булева куба называется **группой инвертирования переменных** (или **группой сдвигов**) J_n.

Теорема Пойа (частный случай)

Метод решения перечисленных задач дает **теорема Пойа**.

Теорема 3 (Пойа). *Число $N(G, m)$ орбит раскрасок в m цветов по подгруппе G симметрической группы перестановок S_n равно*

$$N(G; m) = Z_G(t_1 = m, \ldots, t_n = m) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} m^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi)},$$

где $Z_G(t_1, \ldots, t_n)$ – цикловой индекс группы перестановок G.

Теорема Пойа

Доказательство. Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$,
и $map(N, M) = \{f_1, \ldots, f_{m^n}\}$.

Для каждой перестановки $\pi \in G$ построим соответствующую ей перестановку Π_π на множестве раскрасок $map(N, M)$:

$$\Pi_\pi = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_{m^n}(x) \\ f_1(\pi(x)) & f_2(\pi(x)) & \ldots & f_{m^n}(\pi(x)) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\tilde{S} = \{\Pi_{\pi_1}, \Pi_{\pi_2}, \ldots, \Pi_{\pi_k}\}.$$

Теорема Пойа

Доказательство (продолжение). Проверим, что $\tilde{G} = (\tilde{S}, \circ)$ является группой.

Свойства группы.
1) Ассоциативность операции $\circ$.
2) Существование нейтрального элемента: Π_e.
3) Для каждого элемента $\Pi_\pi \in \tilde{G}$ существование обратного элемента: $\Pi_{\pi^{-1}}$.

Группы G и $\tilde{G}$ изоморфны, и изоморфизм

$$\varphi : G \to \tilde{G}, \ \pi \mapsto \Pi_\pi.$$

Теорема Пойа

Доказательство (продолжение). Тогда число орбит $N(G;m)$ раскрасок элементов множества N в m цветов равно числу орбит $N(\tilde{G})$ элементов множества $map(N,M)$ по группе $\tilde{G}$.
По лемме Бернсайда

$$N(\tilde{G}) = \frac{1}{|\tilde{G}|}\sum_{\pi\in G}\lambda_1(\Pi_\pi).$$

Заметим, что $|\tilde{G}| = |G|$, и $\lambda_1(\Pi_\pi) = m^{\lambda_1(\pi)} \cdot m^{\lambda_2(\pi)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi)}$.
Почему?
Т.к. $f(\pi(x)) = g(x)$ в том и только в том случае, когда **для каждого цикла** перестановки π все его **элементы окрашены в один и тот же цвет**. А значит, для каждого из циклов есть только m возможностей окрасить его элементы.

Теорема Пойа

Доказательство (продолжение). Тогда

$$N(G;m) = N(\tilde{G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} m^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi)},$$

или

$$N(G;m) = Z_G(t_1 = m, \ldots, t_n = m).$$

$\square$

Пример: подсчет числа ожерелий

Пример. Найдем число различных ожерелий из 3-х бусин 2-х цветов. Т.е. найдем число орбит раскрасок в два цвета вершин правильного треугольника по группе H его вращений в плоскости. По теореме Пойа

$$N(H;2) = Z_H(t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 2).$$

Напомним, что

$$Z_H(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Тогда

$$N(H;2) = \frac{1}{3}(2^3 + 2 \cdot 2) = 4.$$

Какие раскраски определяют эти орбиты?
1) Все вершины красные; 2) две вершины красные, одна синяя;
3) одна вершина красная, две синие; 4) все вершины синие.

Пример: классификация булевых функций

Пример. Найдем число различных булевых функций, зависящих от 2-х переменных, таких, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой навешиванием отрицаний над переменными.

Найдем цикловой индекс группы J_2:

N	x x_1x_2	$\pi_1(x)$ x_1x_2	$\pi_2(x)$ $x_1\bar{x}_2$	$\pi_3(x)$ $\bar{x}_1x_2$	$\pi_4(x)$ $\bar{x}_1\bar{x}_2$
1	00	00	01	10	11
2	01	01	00	11	10
3	10	10	11	00	01
4	11	11	10	01	00

Получаем, что $\lambda(\pi_1) = (4, 0, 0, 0)$, и $\lambda(\pi_i) = (0, 2, 0, 0)$ при $i = 2, 3, 4$.

Пример: классификиция булевых функций

Пример (продолжение). Поэтому

$$Z_{J_2}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1^4 + 3t_2^2).$$

По теореме Пойа

$$N(J_2; 2) = Z_{J_2}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{4}(2^4 + 3 \cdot 2^2) = 7.$$

Какие это функции? Здесь они перечислены:

$$0;\ 1;\ x_1;\ x_2;\ x_1x_2,\ x_1 \oplus x_2;\ x_1 \vee x_2.$$

Подсчет числа ожерелий с ограничениями

А как найти число различных ожерелий из 5-х бусин 3-х цветов – красного, синего и белого, в которых ровно одна белая бусина?

Или, как подсчитать число различных ожерелий из 7-х бусин 3-х цветов – красного, синего и белого, в которых не менее 3-х красных бусин?

Ответ дает **общий случай теоремы Пойа**.

Производящие функции

Вспомним понятие **производящей функции**.

Для последовательности чисел $\{a_n\}$ рассмотрим формальную сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится в некоторой области $t \in D$, то в области D эта сумма определяет функцию

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Эта функция называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_n\}$.

Над производящими функциями определяются операции сложения, умножения и т.д. как соответствующие операции над соответствующими рядами.

Раскраски

Пусть по-прежнему $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество элементов, и G – подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество цветов, и $f : N \to M$ – раскраска элементов из N в m цветов.

Множество всех раскрасок элементов из N в m цветов обозначается как $map(N, M)$

Раскраски $f(x), g(x) \in map(N, M)$ эквивалентны относительно группы G ($f \sim_G g$), если

$$\exists \pi \in G : \forall x \in N \; g(x) = f(\pi(x)).$$

Перечисляющий ряд для фигур

Пусть на множестве цветов M задана функция **весов** $w : M \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ – расширенный натуральный ряд.

Пусть q_j – число цветов веса j в множестве M.

Производящая функция

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j t^j$$

называется **перечисляющим рядом для фигур**.

Вес орбиты раскраски

Вес раскраски $f(x) \in map(N, M)$ определяется как

$$w(f) = \sum_{x \in N} w(f(x)).$$

Если $f \sim_G g$, то $w(f) = w(g)$.
Поэтому введем **вес орбиты** O_f как вес любого ее элемента.
Т.е.

$$w(O_f) = w(f).$$

Перечисляющий ряд для функций

Пусть φ_j – число орбит веса j в $map(N, M)$.

Производящая функция

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j t^j$$

называется **перечисляющим рядом для функций** (или **перечисляющим рядом для конфигураций**).

Теорема Пойа (общий случай)

Сформулируем общий случай **теоремы Пойа**.

Теорема 4 (Пойа). *Перечисляющий ряд для функций* $\Phi(t)$ *равен*

$$\Phi(t) = Z_G(t_1 = Q(t), \ldots, t_n = Q(t^n)),$$

где $Z_G(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} t_1^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi)}$ *– цикловой индекс группы перестановок* G*, а* $Q(t)$ *– перечисляющий ряд для фигур.*

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример. Найдем число различных ожерелий из 5-х бусин красного, синего и *белого* цветов, в которых **ровно одна** *белая* бусина.

Найдем цикловой индекс группы H_5 вращений правильного пятиугольника в плоскости (проверьте!):

$$Z_{H_5}(t_1, \dots, t_5) = \frac{1}{5}(t_1^5 + 4t_5).$$

Введем функцию весов цветов w так, что

$$w(\textit{белый}) = 1; \;\; w(\text{красный}) = w(\text{синий}) = 0.$$

Тогда производящий ряд фигур имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_{H_5}(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4), Q(t^5)) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5)).$$

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример (продолжение). С другой стороны,

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j t^j,$$

где φ_j – число орбит раскрасок веса j.

Нам надо найти число φ_1 орбит раскрасок с весом $j = 1$:
ровно одна *белая* бусина!
Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5)).$$

надо найти коэффициент при t^1.

Получаем: $\varphi_1 = \frac{1}{5} \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 16$.
Значит, найдется 16 таких ожерелий с одной *белой* бусиной.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 4.9-4.10.

2. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из p бусин 2-х цветов, если p – простое число.

3. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из 6-ти бусин красного, синего и белого цветов, в которых
1) ровно две белые бусины;
2) не менее двух белых бусин;
3) не более двух белых бусин;
4) две бусины белые и есть хотя бы одна красная бусина.

4. По теореме Пойа найти число раскрасок граней правильного тетраэдра
1) в два цвета;
2) в синий, красный и зеленый цвета так, что есть хотя бы одна грань каждого из цветов.

Литература к лекции 11

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. Гл. 1, с. 12-23.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004, с. 273-275.

Конец лекции 11