

# Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математические методы верификации схем и программ

## Блок 1

Что такое и зачем нужна  
формальная верификация

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025/2026, осенний семестр

# Что такое формальная верификация

Наиболее популярный подход к отладке<sup>1</sup> вычислительной системы,<sup>2</sup> известный каждому разработчику, — это **тестирование**:

система выполняется в разных обстоятельствах

(на наборе тестовых сценариев),

результаты выполнения сравниваются с ожидаемыми,

и при расхождении ищутся и устраняются причины

Зачастую<sup>3</sup> получить версию системы, подходящую для отладки, — это трудоёмко, дорого или просто невозможно,

и тогда применяется **имитационное моделирование**:

составление и выполнение модели разрабатываемой системы

В большинстве случаев нельзя исследовать систему или её модель во **всевозможных** обстоятельствах, поэтому после тестирования и моделирования **ошибки всё равно остаются**

---

1 Обнаружению и устранению ошибок

2 Например, программы, микросхемы, распределённой системы и многого другого

3 При разработке микросхем, распределённых систем, больших программных и программно-аппаратных комплексов и не только

# Что такое формальная верификация

The only effective way to raise the confidence level of a program significantly is to give a convincing **proof** of its correctness.<sup>1</sup>

Dijkstra. The humble programmer.

Turing award speech. 1972.

Хотя с этим утверждением можно до некоторой степени поспорить, но уже в 1970-х годах обозначилась необходимость **строго обосновывать** отсутствие ошибок проектирования и программирования в вычислительных системах

**Формальная верификация** — это подход к проверке правильности вычислительных систем, устроенный в целом так:

- ▶ Придумывается **формальная спецификация**: набор требований, означающих правильность функционирования системы и записанных на формальном языке
- ▶ Строго математически **обосновывается** (или опровергается) утверждение о том, что система удовлетворяет спецификации

---

1 Существенно повысить уверенность в правильности программы можно только предоставив убедительное **обоснование** правильности

# Какие бывают формальные спецификации

Формальной спецификацией может быть, например:

- ▶ «эталонная» правильная система

Тогда формальная верификация представляет собой **проверку эквивалентности** заданной системы и эталонной

## Пример

Пусть имеется программа  $\pi_1$ , заведомо правильно **строго обосновывать** (хотя, быть может, и неэффективно) сортирующая массив целых чисел

Кто-то написал другую (эффективную, но совершенно непонятную) программу  $\pi_2$  и утверждает, что она тоже сортирует массив целых чисел

Чтобы проверить справедливость этого утверждения, достаточно убедиться, что программа  $\pi_2$  **эквивалентна** программе  $\pi_1$

# Какие бывают формальные спецификации

Формальной спецификацией может быть, например:

- ▶ «эталонная» правильная система

## Другой пример

Цифровая микросхема при разработке, как правило, проходит через много уровней абстракции, например (*если чуть упростить реальность*):

Системный уровень ( $\sim$  SystemC): высокоуровневое алгоритмическое описание



Поведенческий уровень ( $\sim$  Verilog):

способ пересылки логических значений смежду схемными регистрами



Логический уровень ( $\sim$  ALG): соединение триггеров и логических вентилях



Транзисторный уровень: принципиальная схема соединения МОП-транзисторов



Топологический уровень: размещение КМОП-транзисторов на кристалле

Схема на предыдущем уровне служит эталоном для следующего, и описание схемы на следующем уровне должно быть эквивалентно её описанию на предыдущем уровне

# Какие бывают формальные спецификации

Формальной спецификацией может быть, например:

- ▶ набор логических формул, выражающих свойство правильности системы на достаточно простом языке

Для проверки правильности системы не обязательно иметь готовую эталонную систему, достаточно

- ▶ выбрать подходящий формальный язык спецификаций,
- ▶ представить фразу «система работает правильно» формулой и
- ▶ применить известный метод проверки соответствия системы формуле

Спецификации в таком подходе зачастую основываются на

- ▶ **логике предикатов** (*полагаю, что все тут знают, что это такое, но всё равно позже коротко напомню*) и
- ▶ **темпоральных логиках** (*позволяющих описывать взаимосвязи событий, происходящих в системе в разные моменты времени*)

*Этому подходу и этим языкам будет посвящена подавляющая часть курса*

# Что такое формальная верификация

Формальная верификация естественным образом дополняет тестирование и имитационное моделирование,

- ▶ предлагая «доказательство без выполнения» вместо «выполнения без доказательства» и
- ▶ покрывая те случаи, в которых тестирование и моделирование не могут должным образом повысить уверенность в том, что система работает «достаточно правильно»

Два основных популярных подхода к формальной верификации вычислительных систем — это

- ▶ дедуктивный анализ и
- ▶ проверка моделей (другие названия: проверка на модели; верификация моделей программ; model checking)

# Дедуктивный анализ

Дедуктивный подход к формальной верификации обычно устроен так

Для системы задаётся **формальная семантика**:

описание поведения в строгих математических терминах

Формулируется **теорема о корректности системы**: теорема в обычном математическом понимании, утверждающая правильность системы относительно формальной семантики и формальной спецификации

Теорема о корректности **доказывается** каким-либо общепризнанным способом, в том числе

- ▶ вручную, как обычно всё доказывается в математических статьях и книгах, или
- ▶ с использованием средств автоматизированного доказательства теорем (пруверов)

*Подробный рассказ о методах формальной верификации в курсе начнётся с краткого введения в дедуктивную верификацию последовательных программ*



# Проверка моделей (model checking)

Общая схема метода проверки моделей:

1. Спецификация системы представляется в виде формулы  $\varphi$  некоторого логического языка
2. Для системы строится модель  $M$ , представляющая собой
  - ▶ описание того, какие возможности пошагового выполнения имеет система, и вместе с этим
  - ▶ интерпретацию формул выбранного языка спецификаций
3. Проверяется выполнимость формулы  $\varphi$  на модели  $M$ :  
$$M \models \varphi?$$

*Этому подходу посвящена большая часть курса*

# Проверка моделей (model checking)

## Проверка моделей ...

обычно алгоритмически разрешима

обычно применяется для моделей и спецификаций простого вида — например, формула несложного пропозиционального языка и конечный автомат

используется в основном для случаев, когда проверить выполнимость формулы на модели можно автоматически

ввиду автоматического решения предпочтительна там, где может быть применена

## Дедуктивный анализ ...

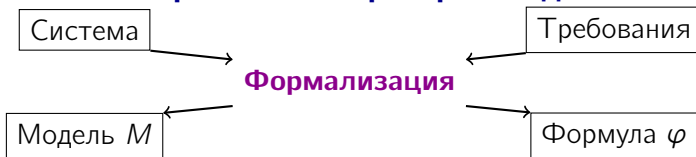
обычно алгоритмически неразрешим

ограничивает устройство моделей и спецификаций в основном только возможностями ручного доказательства пользователем

хотя до некоторой степени и автоматизирован, но в основном выполняется вручную и требует соответствующих навыков в области построения доказательств

может применяться для случаев, с которыми не справляется проверка моделей

# Основные этапы применения проверки моделей



В начале применения метода проверки моделей строятся

- ▶ **модель** по реальной исследуемой системе и
- ▶ **формула** по (неформальной) спецификации этой системы

Моделирование системы

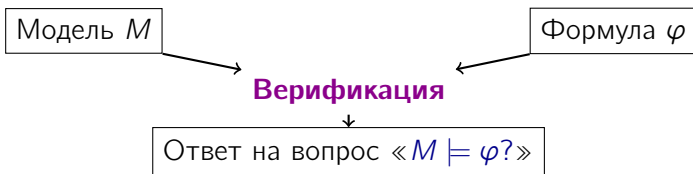
иногда оказывается простым и даже автоматическим,  
а иногда требует большого труда и продвинутых знаний

*(например, знаний о методах абстракции моделей  
для уменьшения их размера — это будет обсуждаться в лекциях)*

Разработать спецификацию и соответствующую формулу —  
непростое дело: во многом ручное, и иногда непросто понять,  
правильна ли формула; если ошибочна, то верификация бессмысленна

*Этому всему будете учиться, выполняя обязательные домашние задания*

# Основные этапы применения проверки моделей



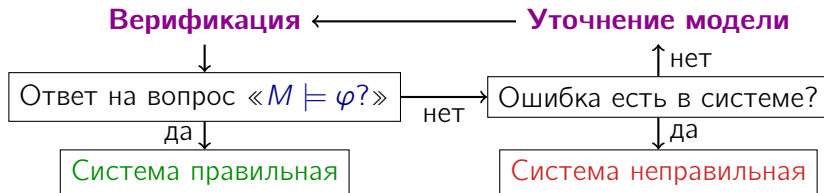
В идеальном случае верификация модели относительно формулы выполняется автоматически с использованием несложных алгоритмов алгебры и дискретной математики, таких как

- проверка выполнимости булевых формул,
- проверка достижимости вершин в графе,
- проверка достижимости компонент сильной связности в графе,
- построение схем по булевым формулам,
- решение систем линейных неравенств,

...

*О применении таких алгоритмов в верификации будет идти речь в лекциях*

# Основные этапы применения проверки моделей



На практике зачастую бывает недостаточно ответить на вопрос « $M \models \varphi$ ?»: если ответ отрицательный, то в зависимости от того, содержится ли найденная ошибка в системе, это может означать как то, что система оказалась неправильной, так и то, что модель следует уточнить

Существуют методы автоматического уточнения модели по найденной ошибке, *и быть может, поговорим и про них ближе к концу курса*

# Зачем нужна формальная верификация?

Когда-то мир обходился и без формальной верификации  
вычислительных систем

Но так жить становится всё труднее

Программно-аппаратные системы повсеместно используются  
в критических областях (**медицина**, **энергетика**, **транспорт**, **военные  
комплексы**, **телекоммуникации**, **банковский сектор**, ...)

Если в такой системе возникнет ошибка, то это может привести  
к серьёзным последствиям и катастрофе  
как при ошибочном продолжении работы,  
так и при экстренном отключении

Помочь избежать такой катастрофы может  
**строгое обоснование** отсутствия ошибок

# Зачем нужна формальная верификация?

Когда-то мир обходился и без формальной верификации  
вычислительных систем

Но так жить становится всё труднее

Даже вне критических областей цена ошибки может быть высока:

- ▶ вычислительные системы становятся всё сложнее, объёмнее и дороже, а значит, повышается вероятность ошибок и трудоёмкость их исправления
- ▶ с возрастанием сложности систем усложняются и методы их разработки, и вместе с этим разнообразие ошибок и процессы их устранения без необходимости возврата к начальным этапам разработки
- ▶ в некоторых системах (таких как микросхема на кристалле) исправить ошибку «локально» в готовом изделии вовсе невозможно, исправление сопряжено с полным перевыпуск изделия со всеми сопутствующими затратами

# Зачем нужна формальная верификация?

Когда-то мир обходился и без формальной верификации  
вычислительных систем

Но так жить становится всё труднее

При этом в современных вычислительных системах есть классы  
ошибок, которые практически невозможно обнаружить более  
«привычными» программисту методами, такими как тестирование

Например, это ошибки в распределённых системах,  
скрытые в распределённом взаимодействии компонентов

*(А в современном мире  
большинство систем являются распределёнными)*



# Зачем нужна формальная верификация?

Чтобы понять, насколько неприятными могут быть последствия даже небольших ошибок, достаточно лишь «слегка» поискать примеры в открытом доступе:<sup>1</sup>

- ▶ Отдаляется «светлое будущее человечества»
  - ▶ 1962, Маринер 1; 1988, Фобос-1; 1996, Ариан-5; 1999, Mars Climate Orbiter; 2005, зонд Гюйгенс; ...
- ▶ Корпорации получают неожиданные огромные убытки
  - ▶ 1994, Intel, сотни млн. \$; 2012, Knight Capital Group, 440 млн. \$; 2009, банк UBS, чудом избежали убытка 31 млрд. \$
- ▶ Умирают люди
  - ▶ 1985–1987, 2000, аппараты радиотерапии Therac-25 и схожий
  - ▶ 1995, Боинг-757 врезался в гору
  - ▶ 2003, ошибка в системе «свой-чужой» ЗРК MIM-104 Patriot
- ▶ Страдают быт людей с широким спектром последствий
  - ▶ 2003, массовое отключение электростанций в нескольких штатах США и провинциях Канады от нескольких часов до нескольких дней

---

<sup>1</sup> См., например, [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_software\\_bugs](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_software_bugs)

# Зачем нужна формальная верификация?

На все эти примеры можно возразить:

«Но где гарантии, что умелое применение формальной верификации помогло бы избежать этих ошибок?»

Двойственные положительные примеры, увы, найти и заметить намного сложнее:

- ▶ Если ошибка в программе привела к серьёзным проблемам, то это видно, и об этом говорят
- ▶ Если же отсутствие ошибок из-за умелого их поиска привело к нормальной работе программы, то это незаметно, и об этом не говорят
- ▶ Нередко средства, методы и результаты формальной верификации умалчиваются из коммерческих соображений и соображений безопасности

Тем не менее известны и такие примеры

# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

1988

Использование дедуктивного анализа позволило университету Оксфорда совместно с компанией Inmos разработать микропроцессор т.н. транспьютера и язык программирования этого микропроцессора Оссам, существенно ускорив разработку (по сравнению с альтернативными проектами), обнаружив неоднозначность в стандарте IEEE и ошибку в подсхеме FPU у конкурентов

Работа была удостоена награды «Queen's award for technological achievement»

# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

1988

Компании GEC Alsthom, MATRA Transport и RATP (автономное агентство парижского транспорта) завершили проект по компьютеризации системы управления парижским метро (RER) на языке Modula-2

Использование дедуктивного анализа для обоснования правильности отдельных модулей системы позволило избежать тестирования отдельных модулей и ограничиться только глобальным тестированием

Позже по той же методике была выполнена полная автоматизация одной из линий парижского метро

# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

1992

National Westminster Bank и компания Platform Seven завершили проект по созданию электронной платёжной системы для smart-cards

Использование дедуктивного анализа позволило обнаружить и исправить уязвимости и получить доказательство соответствия требованиям 200-страничного стандарта безопасности

# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

1992–настоящее время

Продолжается проект системы автоматического управления подвижным барьером для защиты Роттердама от наводнений

Метод проверки моделей (в частности, средство Spin) применяется для обнаружения ошибок в спецификациях и коде на языке C

*Это средство будет изучаться в курсе*

# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

1993

При помощи методов формальной верификации обнаружены ошибки в протоколе обеспечения когерентности кэшей FutureBus+ , принятого в качестве стандарта IEEE для шины высокопроизводительных компьютеров

Для выявления ошибок использовалась проверка моделей (средство SMV)

*В курсе будет рассматриваться потомок этого средства, NuSMV*

# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

2009

Группой австралийских исследователей строго доказана корректность \*nix-микроядра L4 (seL4) в предположениях об устройстве и надёжности аппаратуры, на которой запускается это ядро

Для доказательства использовался дедуктивный анализ со средством автоматизированного построения доказательств Isabelle/HOL

«We can predict precisely how the kernel will behave in every possible situation»

*Этого средства в курсе не будет, увы*



# Зачем нужна формальная верификация?

## Некоторые достижения методов формальной верификации

2003. Тони Хоар инициировал «grand challenge for computing research»: создание верифицирующего компилятора

2006. Создан и пополняется «The Verified Software Repository» (VSR)

Подразделения формальных методов верификации имеются во многих крупных компаниях, занимающихся программами и аппаратурой:  
Microsoft, Intel, Cisco, IBM, Cadence, Mentor Graphics, ...