

Математическая логика

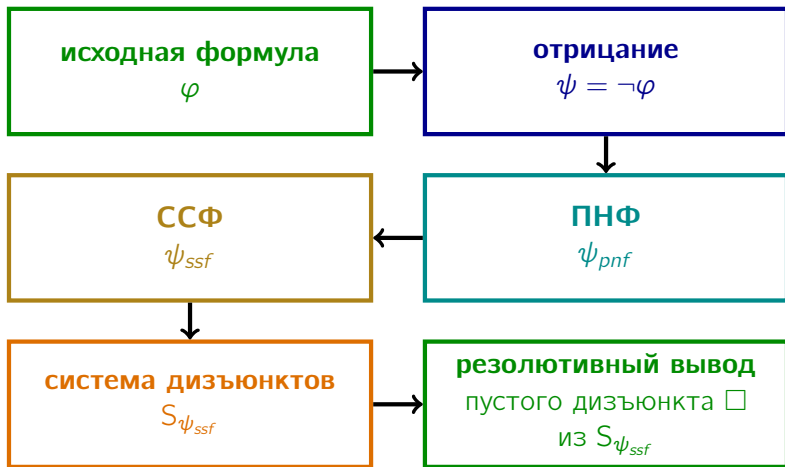
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 25

Теорема Эрбрана
Полнота резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2026, февраль–май



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

\Leftarrow существует вывод \square из $S_{\psi_{ssf}}$

Покажем, что резолютивный вывод **полон**:
справедливо не только « \Leftarrow », но и « \Rightarrow »

Общая схема обоснования полноты

Рассмотрим невыполнимую систему дизъюнктов S

Резолютивная выводимость \square из S будет обоснована так:

1. Существует конечное невыполнимое множество \mathcal{G} основных примеров дизъюнктов из S (теорема Эрбрана)
2. Существует резолютивный вывод \square из \mathcal{G} (лемма об основных дизъюнктах)
3. Каждый шаг вывода \square из \mathcal{G} можно преобразовать в «аналогичный» шаг вывода из S (две леммы о подъёме)
4. Следовательно, весь вывод \square из \mathcal{G} можно преобразовать в вывод \square из S (теорема о полноте резолютивного вывода)

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов невыполнима



существует конечное невыполнимое множество
основных примеров дизъюнктов этой системы

Теорема Эрбрана (доказательство)

Система дизъюнктов S (сигнатуры σ) невыполнима

\Leftrightarrow (теорема об эрбрановских интерпретациях)

S не выполняется ни в одной \mathcal{H} -интерпретации

\Leftrightarrow (определение выполнимости и семантика квантора \forall)

Для каждой \mathcal{H} -интерпретации \mathcal{I} существуют дизъюнкт $\forall \tilde{x}^n D \in S$ и предметы $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что $\mathcal{I} \not\models D[t_1, \dots, t_n]$

\Leftrightarrow (устройство \mathcal{H} -интерпретаций)

Для каждой \mathcal{H} -интерпретации \mathcal{I} существует основной пример D' дизъюнкта $D \in S$, такой что $\mathcal{I} \not\models D'$

\Leftrightarrow (то же другими словами)

Множество \mathcal{G}_S всех основных примеров дизъюнктов из S не выполняется ни в одной \mathcal{H} -интерпретации

\Leftrightarrow (теорема об эрбрановских интерпретациях)

Система \mathcal{G}_S невыполнима

Теорема Эрбрана (доказательство)

Вспомним теорему компактности Мальцева:

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$$

существует **конечное** подмножество Γ' множества Γ , такое что $\Gamma' \models \varphi$

Применив теорему к произвольной невыполнимой формуле φ , немедленно получим такое **следствие**:

$$\not\models \Gamma \Leftrightarrow$$

существует конечное невыполнимое подмножество Γ' множества Γ

Применим это **следствие** к множеству \mathcal{G}_S :

$$\not\models S \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \not\models \mathcal{G}_S \\ \Leftrightarrow$$

существует **конечное** невыполнимое подмножество \mathcal{G} множества \mathcal{G}_S ▼

Лемма об основных дизъюнктах

Из любой конечной невыполнимой системы основных дизъюнктов
резольтивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную конечную невыполнимую
систему основных дизъюнктов S

Докажем лемму индукцией по числу $\|S\|$ различных атомов,
содержащихся в дизъюнктах из S

База: $\|S\| = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \not\models S \Rightarrow S \neq \emptyset \\ \|S\| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = \{\square\} \Rightarrow \square \text{ резольтивно выводим из } S$$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход: $\not\models S$, $\|S\| = N > 0$; $S \rightsquigarrow \square$

Индуктивное предположение: $\not\models \tilde{S}$ и $\|\tilde{S}\| < N \Rightarrow \tilde{S} \rightsquigarrow \square$

Перейдём от S к системе дизъюнктов S' ,
удалив все дизъюнкты вида $D \vee A \vee \neg A$

$\not\models S$, и все удаляемые дизъюнкты общезначимы,
а значит, $\not\models S'$, и достаточно предложить вывод \square из S'

Перейдём от S' к системе S'' так: пока это возможно,
будем заменять дизъюнкты вида $D \vee L \vee L$ на их склейки $D \vee L$

$\not\models S'$, и дизъюнкты заменяются на равносильные выводимые
а значит, $\not\models S''$, и достаточно предложить вывод \square из S''

Если $\|S''\| < N$, то обоснование завершено

Предположим теперь, что $\|S''\| = N$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход: $\not\models S''$, $\|S''\| = N > 0$,

и в S'' нет дизъюнктов вида $D \vee L \vee \neg L$ и $D \vee L \vee L$; $S'' \overset{?}{\rightsquigarrow} \square$

Индуктивное предположение: $\not\models \tilde{S}$, $\|\tilde{S}\| < N \Rightarrow \tilde{S} \rightsquigarrow \square$

Произвольно выберем атом A ,
содержащийся хотя бы в одном дизъюнкте из S''

Разобьём S'' на три множества:

- ▶ S_+ — все дизъюнкты из S'' , содержащие A без отрицания
- ▶ S_- — все дизъюнкты из S'' , содержащие $\neg A$
- ▶ S_x — все остальные дизъюнкты из S''

Построим все резольвенты по контрарной паре $A, \neg A$:

$$S_r = \{D_1 \vee D_2 \mid D_1 \vee A \in S_+, D_2 \vee \neg A \in S_-\}$$

Достаточно показать, что \square выводим из системы $S''' = S_r \cup S_x$

$\|S'''\| = \|S''\| - 1 = N - 1 < N$, а значит, по предположению индукции,
достаточно обосновать соотношение $\not\models S'''$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$$\Vdash S'' : S_+ \boxed{\dots D_+ \vee A \dots} \quad S_- \boxed{\dots D_- \vee \neg A \dots} \quad S_x \boxed{\text{дизь. без } A}$$

$$\Vdash? S''' : S_r \boxed{\dots D_+ \vee D_- \dots} \quad S_x \boxed{\text{дизь. без } A}$$

Рассмотрим произвольную \mathcal{H} -интерпретацию \mathcal{I}

По теореме об эрбрановских интерпретациях,
достаточно обосновать соотношение $\mathcal{I} \not\models S'''$

Так как система S'' невыполнима, верно $\mathcal{I} \not\models S''$

Случай 1: $\mathcal{I} \not\models S_x$. Так как $S_x \subseteq S'''$, верно и $\mathcal{I} \not\models S'''$

Случай 2: $\mathcal{I} \models S_x, A \in \mathcal{I}$

$A \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} \models S_+$

$\mathcal{I} \models S_+ \cup S_x$ и $\mathcal{I} \not\models S_+ \cup S_x \cup S_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_-$

\Rightarrow в S_- содержится дизъюнкт $D_- \vee \neg A$, такой что $\mathcal{I} \not\models D_- \vee \neg A$

$\Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_-$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$$\Vdash S'': S_+ \boxed{\dots D_+ \vee A \dots} \quad S_- \boxed{\dots D_- \vee \neg A \dots} \quad S_x \boxed{\text{дизь. без } A}$$

$$\mathcal{I} \Vdash? S''': S_r \boxed{\dots D_+ \vee D_- \dots} \quad S_x \boxed{\text{дизь. без } A}$$

Случай 2: $\mathcal{I} \models S_x, A \in \mathcal{I}$; получено: $\mathcal{I} \not\models D_-, D_- \vee \neg A \in S_-$

Рассмотрим \mathcal{H} -интерпретацию $\mathcal{J} = \mathcal{I} \setminus \{A\}$

$\mathcal{I} \models S_x$ и в дизъюнктах из S_x не содержится $A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_x$

$\Vdash S'' \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S''$

$A \notin \mathcal{J}$ и дизъюнкты из S_- имеют вид $D \vee \neg A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_-$

$\mathcal{J} \models S_- \cup S_x$ и $\mathcal{J} \not\models S_- \cup S_x \cup S_+ \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S_+ \Rightarrow$

в S_+ содержится дизъюнкт $D_+ \vee A$, такой что $\mathcal{J} \not\models D_+ \vee A \Rightarrow \mathcal{J} \not\models D_+$

$\mathcal{J} \not\models D_+$ и в D_+ не содержится атом $A \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+$

$\mathcal{I} \not\models D_+$ и $\mathcal{I} \not\models D_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$

$\mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$ и $D_+ \vee D_- \in S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S'''$

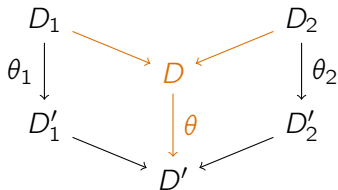
Случай 3: $\mathcal{I} \models S_x, A \notin \mathcal{I}$ — аналогичен случаю 2 ▼

Лемма о подъёме для правила резолюции

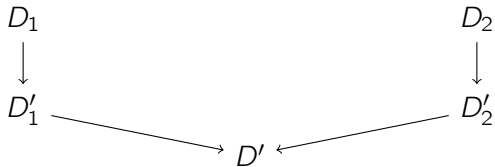
Пусть:

- ▶ D_1, D_2 — дизъюнкты, и $\text{Var}_{D_1} \cap \text{Var}_{D_2} = \emptyset$;
- ▶ D'_1, D'_2 — основные примеры дизъюнктов D_1, D_2 соответственно;
- ▶ D' — резольвента дизъюнктов D'_1, D'_2 .

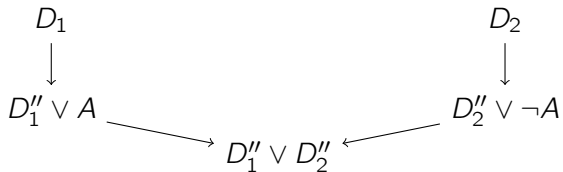
Тогда существует резольвента D дизъюнктов D_1, D_2 , примером которой является D' .



Лемма о подъёме ... (доказательство)

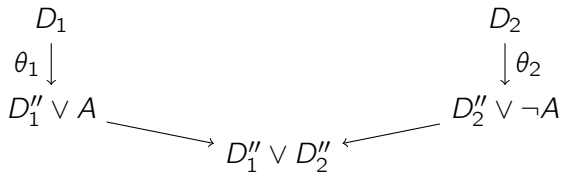


Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару A , $\neg A$ для резольвенты D'

Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару A , $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccc} D_1''' \vee B_1 & & D_2''' \vee \neg B_2 \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \theta_2 \\ (D_1''' \vee B_1)\theta_1 & \longrightarrow & D_1'''\theta_1 \vee D_2'''\theta_2 \longleftarrow (D_2''' \vee \neg B_2)\theta_2 \end{array}$$

Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару A , $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1 , D_2 литеры B_1 , $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccc} D_1''' \vee B_1 & & D_2''' \vee \neg B_2 \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ (D_1''' \vee B_1)\eta & \longrightarrow & (D_2''' \vee \neg B_2)\eta \\ & & \longleftarrow \\ & & (D_1''' \vee D_2''')\eta \end{array}$$

Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару $A, \neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры $B_1, \neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccc} D_1''' \vee B_1 & \xrightarrow{\quad} & (D_1''' \vee D_2''')\mu \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ (D_1''' \vee B_1)\eta & \xrightarrow{\quad} & (D_1''' \vee D_2''')\eta \end{array}$$

$D_2''' \vee \neg B_2$ $(D_2''' \vee \neg B_2)\eta$

Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару A , $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1 , D_2 литеры B_1 , $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По **теореме об унификации**,

существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1 , B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1 , D_2

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccc} D_1''' \vee B_1 & & D_2''' \vee \neg B_2 \\ \mu\theta \downarrow & \searrow & \swarrow \mu\theta \\ (D_1''' \vee B_1)\mu\theta & (D_1''' \vee D_2''')\mu & (D_2''' \vee \neg B_2)\mu\theta \\ & \nearrow & \nwarrow \\ & (D_1''' \vee D_2''')\mu\theta & \end{array}$$

Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару $A, \neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры $B_1, \neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По **теореме об унификации**,

существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

По **определению наиболее общего унификатора**,

существует подстановка θ , такая что $\eta = \mu\theta$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccccc}
 D_1''' \vee B_1 & & & & D_2''' \vee \neg B_2 \\
 \mu\theta \downarrow & \searrow & & \swarrow & \downarrow \mu\theta \\
 (D_1''' \vee B_1)\mu\theta & & (D_1''' \vee D_2''')\mu & & (D_2''' \vee \neg B_2)\mu\theta \\
 & \searrow & \downarrow \theta & \swarrow & \\
 & & (D_1''' \vee D_2''')\mu\theta & &
 \end{array}$$

Выделим в D_1' , D_2' контрарную пару A , $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1 , D_2 литеры B_1 , $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\text{Dom}_{\theta_1} \cap \text{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По **теореме об унификации**,

существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1 , B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1 , D_2

По **определению наиболее общего унификатора**,

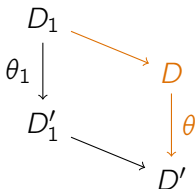
существует подстановка θ , такая что $\eta = \mu\theta$, и $D' = D\theta$ ▼

Лемма о подъёме для правила склейки

Пусть:

- ▶ D_1, D'_1 — дизъюнкт и его основной пример;
- ▶ D' — склейка дизъюнкта D'_1 .

Тогда существует склейка D дизъюнкта D_1 , примером которой является D' .



Доказательство.

Аналогично предыдущей лемме, в чём можете убедиться сами

Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов
резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую систему дизъюнктов S

По **теореме Эрбрана**, существует конечное невыполнимое множество \mathcal{G}
основных примеров дизъюнктов из S

По **лемме об основных дизъюнктах**,
существует вывод $D'_1, \dots, D'_n, \square$ из \mathcal{G}

Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов
резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство. $(D'_1, \dots, D'_n, \square$ — вывод из \mathcal{G})

Рассмотрим такую последовательность дизъюнктов

$\mathfrak{S} = (D_1, \dots, D_n, \square)$:

- ▶ если D'_i — **пример** дизъюнкта D из S , то D_i — вариант D
- ▶ если D'_i — **резольвента** D'_j и D'_k ($j < i, k < i$),
то D_i — резольвента D_j и D_k , примером которой является D'_j
- ▶ если D'_i — **склейка** D'_j ($j < i$),
то D_i — склейка D_j , примером которой является D'_j
- ▶ подстановки (переименования и унификаторы) выберем так, чтобы множества Var_{D_i} попарно непересекались

Корректность задания \mathfrak{S} обеспечивается **леммами о подъёме**

По **определению резолютивного вывода**, \mathfrak{S} — вывод \square из S ▼

Теорема о полноте резолютивного вывода

В доказательстве **теоремы о полноте табличного вывода** приводилась стратегия построения успешного табличного вывода: свод правил, которых достаточно придерживаться, чтобы получить успешный вывод для **любой** невыполнимой таблицы

В доказательстве **теоремы о полноте резолютивного вывода** свод правил такого рода явно не формулировался

А как можно устроить такую стратегию для резолютивного вывода?