

Лекция 6. Наследственные свойства графов.  
Экстремальные графы. Наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством.  
Наибольшее число ребер в планарных графах.  
Наибольшее число ребер в графах без полного подграфа с  $n$  вершинами.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Наследственное свойство графа

Свойство  $P$  графов называется **наследственным**, если из его выполнения для графа  $G$  следует его выполнение и для любого подграфа графа  $G$ .

Пусть  $P(n)$  обозначает наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством  $P$ , содержащих  $n$  вершин.

Графы  $G = (V, E)$  с наследственным свойством  $P$ , для которых выполняется  $|E| = P(|V|)$ , называются **экстремальными** (для этого наследственного свойства).

# Оценка числа ребер

**Теорема 1.** Если  $P$  — наследственное свойство графов, то  $P(n) \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$ ,  $n \geq 3$ .

**Доказательство.**

Пусть  $G = (V, E)$  — граф с наследственным свойством  $P$ ,  $|V| \geq 3$ , и  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

# Оценка числа ребер

**Доказательство.**

Рассмотрим графы  $G_i = G - v_i = (V_i, E_i)$ :  $V_i = V \setminus \{v_i\}$ ,  
 $|E_i| = |E| - d_G(v_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Графы  $G_i$  — также с наследственным свойством  $P$ , откуда

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leq P(n-1)$$

для всех  $i = 1, \dots, n$ . Сложим все неравенства:

$$n \cdot |E| - \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1).$$

## Оценка числа ребер

**Доказательство.**

По формуле Эйлера для степеней вершин  $\sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2 \cdot |E|$ ,  
поэтому

$$|E| \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1).$$

Неравенство выполняется для любого графа с наследственным свойством  $P$ , а значит, и для графа  $G = (V, E)$  с  $|E| = P(n)$ . □

# Планарный граф

Граф  $G = (V, E)$  называется **планарным**, если его можно так отобразить на плоскость, что каждой *вершине*  $v \in V$  соответствует *точка* плоскости, причем разным вершинам — разные точки; каждому *ребру*  $(v, w) \in E$  — непрерывная *кривая*, соединяющая точки, соответствующие вершинам  $v, w$ , и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам; кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Такое отображение планарного графа называется его **укладкой** на плоскости.

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область — **внешней гранью**.

# Формула Эйлера

**Теорема 2 (формула Эйлера для планарных графов).**  
*Если  $G = (V, E)$  — связный планарный граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство  $p - q + r = 2$ , где  $r$  — число граней в этой укладке.*

**Доказательство:** индукция по  $q$  при заданном  $p$ .

*Базис индукции:* если  $q = p - 1$ , то  $G$  — дерево.

Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

# Формула Эйлера

## Доказательство.

*Индуктивный переход:* пусть для графа  $G$  верно  $q \geq r$ .

Тогда в графе  $G$  найдется хотя бы один цикл, пусть  $e$  — ребро из какого-то его цикла.

Граф  $G' = G - e$  — связный и планарный с  $p$  вершинами и  $(q - 1)$  ребрами, и его укладка на плоскости содержит  $(r - 1)$  граней.

Для графа  $G'$  верно предположение индукции, т. е.

$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$ , откуда  $p - q + r = 2$ .





# Число ребер в планарных графах

**Теорема 3.** *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с  $p$ ,  $p \geq 3$ , вершинами равно  $3p - 6$ .*

**Доказательство.** Можно рассматривать связные графы.

1. Пусть  $G = (V, E)$  — связный планарный граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами.

Рассмотрим укладку графа  $G$  на плоскости, и пусть  $q_i$  — число ребер, встречающихся при обходе границы  $i$ -ю грани в этой укладке,  $i = 1, \dots, r$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^r q_i = 2q$ , т. к. каждое ребро либо разделяет две грани, а значит, считается при обходе границ этих двух граней; либо лежит в одной грани, а значит, при обходе ее границы считается два раза.

Из связности графа и  $p \geq 3$  получаем  $q_i \geq 3$ , откуда  $3r \leq 2q$ , или  $r \leq \frac{2}{3}q$ .

По формуле Эйлера  $r = q - p + 2$ , поэтому  $q \leq 3p - 6$ .

# Число ребер в планарных графах

## Доказательство.

2. Построим графы, на которых достигается эта оценка. Это связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины три. Такие графы называются **триангуляциями**.

Если  $p = 3$ , то  $G_p = K_3$ .

Пусть уже построен связный планарный граф  $G_p$  с  $p$  вершинами и  $3p - 6$  ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником.

Тогда граф  $G_{p+1}$  получается из  $G_p$  добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами этой грани.



# Число ребер в планарных графах

# Число граней в планарных графах

**Следствие 3.1.** *Наибольшее число граней в укладке планарного графа (без петель и кратных ребер) с  $p$ ,  $p \geq 3$ , вершинами равно  $2p - 4$ .*

# Графы без полных подграфов $K_n$

Отсутствие в графах подграфа  $K_n$  — наследственное свойство.

Обозначение:  $ex(p, K_n)$  — наибольшее число ребер в графах с  $p$  вершинами, не содержащих подграф  $K_n$ .

# Число ребер в графах без треугольников

**Теорема 4.** *Справедливо равенство  $ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor$ ,  $p \geq 1$ .*

**Доказательство** верхней оценки: индукция по числу вершин  $p$ .

1. Сначала рассмотрим случай четного  $p$ .

*Базис индукции*  $p = 2$  верен.

*Индуктивный переход:* пусть утверждение верно для всех графов с  $p = 2s$  вершинами.

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$  с  $(p + 2)$  вершинами.

Выберем в графе  $G$  две смежные вершины  $w_1, w_2 \in V$  и рассмотрим граф  $G' = G - \{w_1, w_2\}$ .

Граф  $G' = (V', E')$  не содержит треугольников и для него верно предположение индукции, т. е.  $|E'| \leq s^2$ .

Тогда

$$|E| \leq s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1,$$

где единица в сумме соответствует ребру  $(w_1, w_2) \in E$ .

# Число ребер в графах без треугольников

# Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство** верхней оценки.

Граф  $G$  — без треугольников, поэтому вершины  $w_1$  и  $w_2$  не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной  $u \in V'$ , откуда  $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \leq p$ .

Следовательно,

$$|E| \leq s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2.$$

2. Случай нечетного  $p$  доказывается аналогично.



# Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство** нижней оценки.

Граф — **двудольный**, если его вершины можно разбить на две непересекающиеся части (доли) так, что смежны только вершины из разных частей.

Двудольный граф с долями из  $m$  и  $n$  вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным двудольным графом**  $K_{m,n}$ .

Графы без треугольников  $K_{s,s}$  и  $K_{s,(s+1)}$  при четном  $p = 2s$  и нечетном  $p = 2s + 1$  соответственно показывают достижимость верхней оценки.



# Число ребер в графах без треугольников

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Теорема 5 (П. Туран, 1941).** При  $p \geq 1$ ,  $n \geq 3$  справедливо равенство

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где  $r$  — остаток от деления  $p$  на  $(n-1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $p = (n-1) \cdot s + r$ , где  $0 \leq r \leq n-2$ . Доказательство верхней оценки проведем индукцией по  $s$  при заданном  $r$ .

*Базис индукции:*  $s = 0$ .

В этом случае  $ex(r, K_n) = \frac{r(r-1)}{2}$ , т. к. наибольшее число ребер содержит полный граф  $K_r$ .

Число ребер в графах без подграфов  $K_n$ 

**Доказательство** верхней оценки.

*Индуктивный переход:* пусть утверждение верно для всех графов с  $p = (n - 1)s + r$  вершинами.

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$  с  $p + (n - 1) = (n - 1)(s + 1) + r$  вершинами, в котором нет подграфов  $K_n$  и содержится **наибольшее число ребер**.

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Доказательство** верхней оценки.

В графе  $G$  обязательно найдется **полный подграф с  $(n - 1)$  вершиной**.

Действительно, пусть это не так, т. е. для любых  $(n - 1)$  вершин графа  $G$  хотя бы одно ребро с концами в этих вершинах в нем не содержится.

Тогда выберем  $(n - 1)$  вершину  $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$  в графе  $G$  и если  $e = (v_i, v_j) \notin E$ , то добавим к графу  $G$  ребро  $e$ . Получим граф  $G_0 = G + e$ .

В графе  $G_0$  отсутствуют полные подграфы  $K_n$ , но ребер больше, чем в графе  $G$ , чего не может быть.

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Доказательство** верхней оценки.

Итак, в графе  $G$  найдется подграф  $H = K_{n-1}$  и пусть  $w_1, \dots, w_{n-1} \in V$  — его вершины.

Рассмотрим граф  $G' = G - \{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ .

Граф  $G' = (V', E')$  не содержит подграфов  $K_n$  и для него верно предположение индукции, т. е.

$$|E'| \leq \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

Число ребер в графах без подграфов  $K_n$ 

**Доказательство** верхней оценки.

Получаем

$$|E| \leq \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2)),$$

где число  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  в сумме соответствует всем ребрам подграфа  $H = K_{n-1}$ .



# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Доказательство** верхней оценки.

Граф  $G$  не содержит подграфов  $K_n$ , поэтому вершины  $w_1, \dots, w_{n-1}$  не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной  $u \in V'$ , откуда

$$\sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2)) \leq p(n-2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(n-2) = \\ &= \frac{(n-2)(p^2-r^2) + (n-1)^2(n-2) + 2p(n-1)(n-2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} = \\ &= \frac{(n-2)((p+(n-1))^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}. \end{aligned}$$

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Доказательство** нижней оценки.

Граф —  $k$ -**дольный**,  $k \geq 2$ , если его вершины можно разбить на  $k$  непересекающихся частей (долей) так, что смежны только вершины из разных частей.

Граф с долями из  $n_1, \dots, n_k$  вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным  $k$ -дольным графом**  $K_{n_1, \dots, n_k}$ .

Графы  $K_{p_1, \dots, p_{n-1}}$  при  $p = (n-1)s + r$ , где  $0 \leq r \leq n-2$ ,

$$p_1 = \dots = p_r = (s+1), \quad p_{r+1} = \dots = p_{n-1} = s,$$

показывают достижимость верхней оценки.

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Доказательство** нижней оценки.

Действительно, подсчитаем число ребер  $q$  в графе  $K_{p_1, \dots, p_{n-1}}$  при  $p = (n-1)s + r$ , где  $0 \leq r \leq n-2$ ,

$p_1 = \dots = p_r = (s+1)$ ,  $p_{r+1} = \dots = p_{n-1} = s$ .

Итак,

$$q = \frac{1}{2} \cdot (p-r) \cdot \left( p-r - \frac{p-r}{n-1} \right) + r \cdot \left( p-r - \frac{p-r}{n-1} \right) + \frac{r(r-1)}{2},$$

где слагаемое  $\frac{r(r-1)}{2}$  в сумме соответствует всем ребрам полного графа с  $r$  вершинами.

Получаем:

$$q = \frac{1}{2} \cdot (p+r) \cdot \frac{(p-r)(n-2)}{n-1} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}.$$



# Краткий итог лекции

1. Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с  $p$  ребрами равно  $3p - 6$ . Экстремальными планарными графами являются триангуляции.
2. Экстремальным графом с  $p$  вершинами без  $K_n$  является полный  $(n - 1)$ -дольный граф  $K_{(s+1), \dots, (s+1), s, \dots, s}$  при  $p = (n - 1)s + r$ ,  $0 \leq r \leq n - 2$ , где в индексе графа число  $(s + 1)$  встречается  $r$  раз и число  $s$  встречается  $(n - 1 - r)$  раз.

# Задачи

1. Построить планарный граф  $G = (V, E)$  с наибольшим числом ребер, если:

- 1)  $|V| = 4$ ;
- 2)  $|V| = 5$ ;
- 3)  $|V| = 6$ ;
- 4)  $|V| = 7$ .

2. Существует ли планарный граф  $G = (V, E)$ , если:

- 1)  $|V| = 7, |E| = 16$ ;
- 2)  $|V| = 8, |E| = 17$ ;
- 3)  $|V| = 6$  и в  $G$  ровно 7 граней;
- 4)  $|V| = 7$  и в  $G$  ровно 12 граней.

# Задачи

3. Построить граф  $G = (V, E)$  без треугольников с наибольшим числом ребер, если:

- 1)  $|V| = 5$ ;
- 2)  $|V| = 6$ ;
- 3)  $|V| = 7$ ;
- 4)  $|V| = 8$ .

4. Построить граф  $G = (V, E)$  без полного графа  $K_n$  с наибольшим числом ребер, если:

- 1)  $|V| = 5, n = 3$ ;
- 2)  $|V| = 6, n = 3$ ;
- 3)  $|V| = 7, n = 4$ ;
- 4)  $|V| = 8, n = 4$ .



# Задачи

- Доказать, что экстремальными планарными графами являются только триангуляции.
- Доказать, что экстремальными графами без  $K_n$  вершинами являются только  $(n - 1)$ -дольные графы с максимальным возможным числом ребер.
- Найти наибольшее число ребер в графах с  $p$  вершинами без циклов (т. е. для наследственного свойства отсутствия циклов в графе). Описать все экстремальные графы для наследственного свойства отсутствия циклов.

# Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 155–159.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153, 30–31.
3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 301–302.

Конец лекции