Лекция 6. Наследственные свойства графов. Экстремальные графы. Наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством. Наибольшее число ребер в планарных графах. Наибольшее число ребер в графах без полного подграфа с n вершинами.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Наследственное свойство графа

Свойство P графов называется **наследственным**, если из его выполнения для графа G следует его выполнение и для любого подграфа графа G.

Пусть $P(n)$ обозначает наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством P, содержащих n вершин.

Графы $G=(V,E)$ с наследственным свойством P, для которых выполняется $|E|=P(|V|)$, называются **экстремальными** (для этого наследственного свойства).

Оценка числа ребер

Теорема 1. *Если P — наследственное свойство графов, то* $P(n) \leqslant \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$, $n \geqslant 3$.

Доказательство.
Пусть $G = (V, E)$ — граф с наследственным свойством P, $|V| \geqslant 3$, и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Оценка числа ребер

Доказательство.
Рассмотрим графы $G_i = G - v_i = (V_i, E_i)$: $V_i = V \setminus \{v_i\}$, $|E_i| = |E| - d_G(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Графы G_i — также с наследственным свойством P, откуда

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leqslant P(n-1)$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Сложим все неравенства:

$$n \cdot |E| - \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \leqslant n \cdot P(n-1).$$

Оценка числа ребер

Доказательство.

По формуле Эйлера для степеней вершин $\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2 \cdot |E|$, поэтому

$$|E| \leqslant \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1).$$

Неравенство выполняется для любого графа с наследственным свойством P, а значит, и для графа $G = (V, E)$ с $|E| = P(n)$.

$\square$

Планарный граф

Граф $G = (V, E)$ называется **планарным**, если его можно так отобразить на плоскость, что каждой *вершине* $v \in V$ соответствует *точка* плоскости, причем разным вершинам — разные точки; каждому *ребру* $(v, w) \in E$— непрерывная *кривая*, соединяющая точки, соответствующие вершинам v, w, и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам; кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Такое отображение планарного графа называется его **укладкой** на плоскости.

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область — **внешней гранью**.

Формула Эйлера

Теорема 2 (формула Эйлера для планарных графов). *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.*

Доказательство: индукция по q при заданном p.
Базис индукции: если $q = p - 1$, то G — дерево.
Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

Формула Эйлера

Доказательство.
Индуктивный переход: пусть в графе G всего $q \geqslant p$ ребер.
Тогда в графе G найдется хотя бы один цикл, пусть e — ребро из какого-то его цикла.
Граф $G' = G - e$ — связный и планарный с p вершинами и $(q - 1)$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $(r - 1)$ граней.
Для графа G' верно предположение индукции, т. е. $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$.

$\square$

Число ребер в планарных графах

Теорема 3. *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с* p*,* $p \geqslant 3$*, вершинами равно* $3p - 6$.

Доказательство. Можно рассматривать связные графы.
1. Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами.
Рассмотрим укладку графа G на плоскости, и пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-ю грани в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро либо разделяет две грани, а значит, считается при обходе границ этих двух граней; либо лежит в одной грани, а значит, при обходе ее границы считается два раза.
Из связности графа и $p \geqslant 3$ получаем $q_i \geqslant 3$, откуда $3r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{2}{3}q$.
По формуле Эйлера $r = q - p + 2$, поэтому $q \leqslant 3p - 6$.

Число ребер в планарных графах

Доказательство.
2. Построим графы, на которых достигается эта оценка. Это связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины три. Такие графы называются **триангуляциями**.
Если $p = 3$, то $G_p = K_3$.
Пусть уже построен связный планарный граф G_p с p вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником.
Тогда граф G_{p+1} получается из G_p добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами этой грани.

□

Число граней в планарных графах

Следствие 3.1. *Наибольшее число граней в укладке планарного графа (без петель и кратных ребер) с* p, $p \geqslant 3$, *вершинами равно* $2p - 4$.

Графы без полных подграфов K_n

Отсутствие в графах подграфа K_n — наследственное свойство.

Обозначение: $ex(p, K_n)$ — наибольшее число ребер в графах с p вершинами, не содержащих подграф K_n.

Число ребер в графах без треугольников

Теорема 4. *Справедливо равенство* $ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor$, $p \geqslant 1$.

Доказательство верхней оценки: индукция по числу вершин p.
1. Сначала рассмотрим случай четного p.
Базис индукции $p = 2$ верен.
Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с $p = 2s$ вершинами.
Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $(p + 2)$ вершинами.
Выберем в графе G *две смежные* вершины $w_1, w_2 \in V$ и рассмотрим граф $G' = G - \{w_1, w_2\}$.
Граф $G' = (V', E')$ не содержит треугольников и для него верно предположение индукции, т. е. $|E'| \leqslant s^2$.
Тогда

$$|E| \leqslant s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1,$$

где единица в сумме соответствует ребру $(w_1, w_2) \in E$.

Число ребер в графах без треугольников

Доказательство верхней оценки.
Граф G — без треугольников, поэтому вершины w_1 и w_2 не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, откуда $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \leqslant p$.
Следовательно,

$$|E| \leqslant s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2.$$

2. Случай нечетного p доказывается аналогично.

Число ребер в графах без треугольников

Доказательство нижней оценки.
Граф — **двудольный**, если его вершины можно разбить на две непересекающиеся части (доли) так, что смежны только вершины из разных частей.

Двудольный граф с долями из m и n вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным двудольным** графом $K_{m,n}$.

Графы без треугольников $K_{s,s}$ и $K_{s,(s+1)}$ при четном $p = 2s$ и нечетном $p = 2s + 1$ соответственно показывают достижимость верхней оценки.

□

Число ребер в графах без подграфов K_n

Теорема 5 (П. Туран, 1941). *При* $p \geqslant 1$, $n \geqslant 3$ *справедливо равенство*

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где r *— остаток от деления* p *на* $(n-1)$.

Доказательство. Пусть $p = (n-1) \cdot s + r$, где $0 \leqslant r \leqslant n-2$. Доказательство верхней оценки проведем индукцией по s при заданном r.

Базис индукции: $s = 0$.
В этом случае $ex(r, K_n) = \frac{r(r-1)}{2}$, т. к. наибольшее число ребер содержит полный граф K_r.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.
Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с $p = (n-1)s + r$ вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $p + (n-1) = (n-1)(s+1) + r$ вершинами, в котором нет подграфов K_n и содержится наибольшее число ребер.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.
В графе G обязательно найдется полный подграф с $(n-1)$ вершиной.

В самом деле, пусть это не так, т. е. для любых $(n-1)$ вершин графа G хотя бы одно ребро с концами в этих вершинах в нем не содержится.
Тогда выберем $(n-1)$ вершину $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ в графе G и если $e = (v_i, v_j) \notin E$, то добавим к графу G ребро e. Получим граф $G_0 = G + e$.
В графе G_0 отсутствуют полные подграфы K_n, но ребер больше, чем в графе G, чего не может быть.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.
Итак, в графе G найдется подграф $H = K_{n-1}$ и пусть $w_1, \ldots, w_{n-1} \in V$ — его вершины.

Рассмотрим граф $G' = G - \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$.
Граф $G' = (V', E')$ не содержит подграфов K_n и для него верно предположение индукции, т. е.

$$|E'| \leqslant \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.
Получаем

$$\begin{aligned}|E| \quad \leqslant \quad & \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \\ & + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2)),\end{aligned}$$

где число $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ в сумме соответствует всем ребрам подграфа $H = K_{n-1}$.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.
Граф G не содержит подграфов K_n, поэтому вершины $w_1, \ldots, w_{n-1}$ не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, откуда

$$\sum_{i=1}^{n-1}(d_G(w_i) - (n-2)) \leqslant p(n-2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |E| &\leqslant \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(n-2) = \\ &= \frac{(n-2)(p^2-r^2)+(n-1)^2(n-2)+2p(n-1)(n-2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} = \\ &= \frac{(n-2)((p+(n-1))^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}. \end{aligned}$$

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство нижней оценки.
Граф — k-**дольный**, $k \geqslant 2$, если его вершины можно разбить на k непересекающихся частей (долей) так, что смежны только вершины из разных частей.

Граф с долями из $n_1, \ldots, n_k$ вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным** k-**дольным** графом $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

Графы $K_{p_1,\ldots,p_{n-1}}$ при $p = (n-1)s + r$, где $0 \leqslant r \leqslant n-2$,

$$p_1 = \ldots = p_r = (s+1), \ p_{r+1} = \ldots = p_{n-1} = s,$$

показывают достижимость верхней оценки.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство нижней оценки.
В самом деле, подсчитаем число ребер q в графе $K_{p_1,\ldots,p_{n-1}}$ при $p = (n-1)s + r$, где $0 \le r \le n-2$,
$p_1 = \ldots = p_r = (s+1)$, $p_{r+1} = \ldots = p_{n-1} = s$.
Итак,

$$q = \frac{1}{2}\cdot(p-r)\cdot\left(p - r - \frac{p-r}{n-1}\right) + r\cdot\left(p - r - \frac{p-r}{n-1}\right) + \frac{r(r-1)}{2},$$

где слагаемое $\frac{r(r-1)}{2}$ в сумме соответствует всем ребрам полного графа с r вершинами.
Получаем:

$$q = \frac{1}{2}\cdot(p+r)\cdot\frac{(p-r)(n-2)}{n-1} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

$\square$

Краткий итог лекции

1. Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с p ребрами равно $3p-6$. Экстремальными планарными графами являются триангуляции.

2. Экстремальным графом с p вершинами без K_n является полный $(n-1)$-дольный граф $K_{(s+1),\ldots,(s+1),s,\ldots,s}$ при $p=(n-1)s+r$, $0\leq r\leq n-2$, где в индексе графа число $(s+1)$ встречается r раз и число s встречается $(n-1-r)$ раз.

Задачи

1. Построить планарный граф $G = (V, E)$ с наибольшим числом ребер, если:

1) $|V| = 4$;
2) $|V| = 5$;
3) $|V| = 6$;
4) $|V| = 7$.

2. Существует ли планарный граф $G = (V, E)$, если:

1) $|V| = 7$, $|E| = 16$;
2) $|V| = 8$, $|E| = 17$;
3) $|V| = 6$ и в G ровно 7 граней;
4) $|V| = 7$ и в G ровно 12 граней.

Задачи

3. Построить граф $G = (V, E)$ без треугольников с наибольшим числом ребер, если:

1) $|V| = 5$;
2) $|V| = 6$;
3) $|V| = 7$;
4) $|V| = 8$.

4. Построить граф $G = (V, E)$ без полного графа K_n с наибольшим числом ребер, если:

1) $|V| = 5,\ n = 3$;
2) $|V| = 6,\ n = 3$;
3) $|V| = 7,\ n = 4$;
4) $|V| = 8,\ n = 4$.

Задачи

5. Доказать, что экстремальными планарными графами являются только триангуляции.

6. Доказать, что экстремальными графами без K_n вершинами являются только $(n-1)$-дольные графы с максимально возможным числом ребер.

7. Найти наибольшее число ребер в графах с p вершинами без циклов (т. е. для наследственного свойства отсутствия циклов в графе). Описать все экстремальные графы для наследственного свойства отсутствия циклов.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 155–159.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153, 30–31.

3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 301–302.

Конец лекции