Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 4

Системы переходов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Требование строгости анализа правильности р.а. означает, что необходимо иметь подходящую математическую модель р.с., в которой реализован этот алгоритм:

- Достаточно точную и детальную, чтобы интересующие свойства модели адекватно отвечали свойствам моделируемой р.с.
- Достаточно просто устроенную, чтобы можно было разумно и наглядно использовать её для анализа р.а.
- Достаточно общую, чтобы можно было применять её для анализа разнообразных р.а. и р.с.

Вычисление распределённой системы обычно можно представить как упорядоченную дискретную совокупность действий (событий), выполняющихся (реализующихся; происходящих) в её узлах и отвечающих небольшим изменениям конфигурации системы (её глобального состояния)

Конфигурация системы представляет собой совкупность локальных состояний её узлов и состояния её коммуникационной подсистемы

Способ изменения текущей конфигурации при выполнении действия можно задать в виде семейства переходов, аналогичных переходам в конечном автомате и отвечающих изменению части конфигурации системы, доступной узлу

Система переходов

Системой переходов (с.п.) будем называть тройку $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \to)$, где:

- $\mathcal{C}$ — непустое множество конфигураций
- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ — подмножество начальных конфигураций
- $\to \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ — множество переходов системы

Систему переходов можно понимать как размеченный ориентированный граф:

- $\mathcal{C}$ — множество вершин
- $\to$ — множество дуг
- возможно, бесконечный
- с петлями и без кратных дуг
- вершины множества $\mathcal{I}$ помечены как начальные

В связи с этим будем применять к с.п. известные обозначения и терминологию из теории графов

Система переходов

Путь в с.п., исходящий из начальной конфигурации, будем называть начальным

Конфигурацию с.п. назовём заключительной (или, по-другому, тупиковой), если из неё не исходит ни одной дуги

Путь в с.п. будем называть максимальным, если он бесконечен или оканчивается в заключительной конфигурации

Вычислением с.п. будем называть её максимальный начальный путь

Для конфигураций γ_1 и γ_2 с.п. $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \to)$ записью $\gamma_1 \to^* \gamma_2$ будем обозначать факт достижимости γ_2 из γ_1 (то есть $\to^*$ — рефлексивно-транзитивное замыкание двуместного отношения $\to$)

Конфигурацию с.п. будем называть достижимой, если она достижима хотя бы из одной начальной конфигурации

Мультимножество

$\mathbb{N}_0$ — так будем обозначать множество всех целых неотрицательных чисел: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Для множества X мультимножество с основой X — это отображение вида $M : X \to \mathbb{N}_0$

Содержательно, мультимножество — это неупорядоченная совокупность элементов, в которой (в отличие от «просто» множества) каждый элемент может встречаться произвольное число раз

Значение $M(x)$ для мультимножества M и элемента x называется кратностью (количеством вхождений) x в M

Если $M(x) = 0$, то элемент x не входит в мультимножество M

$\mathbb{M}(X)$ — так обозначим семейство всех мультимножеств с основой X

Конечное мультимножество можно задать списком элементов, как и конечное множество: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где элементы x_i могут повторяться, и каждый элемент записан столько раз, какова его кратность

Мультимножество

Основные операции и отношения над мультимножествами M, N с одной основой X:

- $x \in M$ — отношение принадлежности элемента мультимножеству:
$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad M(x) > 0$$
- $M \cup N$ — объединение мультимножеств:
$$(M \cup N)(x) = \max(M(x), N(x))$$
- $M + N$ — сумма мультимножеств: $(M + N)(x) = M(x) + N(x)$
- $M \cap N$ — пересечение мультимножеств: $(M \cap N) = \min(M(x), N(x))$
- $M - N$ — разность мультимножеств: $(M - N)(x) = M(x) \dot{-} N(x)$, где $\dot{-}$ — операция усечённой разности:
$$i \dot{-} j = \begin{cases} i - j, & \text{если } i \geq j; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Мультимножество

Примеры:

- $\{a, a, b\}(a) = 2, \quad \{a, a, b\}(b) = 1, \quad \{a, a, b\}(c) = 0$
- $a \in \{a, a, b\}, \quad b \in \{a, a, b\}, \quad c \notin \{a, a, b\}$
- $\{a, a, b\} \cup \{a, b, b, c\} = \{a, a, b, b, c\}$
- $\{a, a, b\} + \{a, b, b, c\} = \{a, a, a, b, b, b, c\}$
- $\{a, a, a, b, b, b, c\} \cap \{a, a, b, c, c\} = \{a, a, b, c\}$
- $\{a, a, a, b, b, b, c\} - \{a, a, b, c, c\} = \{a, b, b\}$

Система переходов узла

$\mathcal{M}$ — так будем обозначать множество сообщений, используемых в системе

Будем использовать следующие записи для обозначения взаимодействия с коммуникационной подсистемой:

- $m!$, где $m \in \mathcal{M}$ — отправка сообщения m в коммуникационную подсистему
- $m?$, где $m \in \mathcal{M}$ — приём сообщения m из коммуникационной подсистемы
- λ — отсутствие взаимодействия

$\mathcal{M}?!$ — так будем обозначать множество

$$\{m! \mid m \in \mathcal{M}\} \cup \{m? \mid m \in \mathcal{M}\} \cup \{\lambda\}$$

Система переходов узла

Формализованным узлом над множеством сообщений $\mathcal{M}$ назовём систему $(Z, I, \mapsto)$, где:

- Z — непустое множество состояний
- $I \subseteq Z$ — подмножество начальных состояний
- $\mapsto \subseteq Z \times \mathcal{M}?! \times Z$ — множество переходов узла

Переход (s, σ, s') будем понимать как дугу графа, помеченную символом σ: $s \overset{\sigma}{\mapsto} s'$

В изображении дуги $s \overset{\lambda}{\mapsto} s'$ будем иногда опускать «λ»:

$$(s \overset{\lambda}{\mapsto} s') = (s \mapsto s')$$

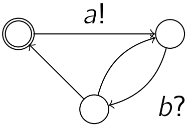
Будем говорить, что при выполнении перехода, помеченного отправкой $m!$, приёмом $m?$ и символом λ, соответственно отправляется сообщение m, принимается сообщение m и нет взаимодействия

Узел можно понимать как с.п. с доразмеченными переходами и другими названиями вершин для меньшей путаницы:

- В системе (глобально) — «конфигурация»
- В узле (локально) — «состояние»

Система переходов узла

Пример:



Здесь и далее:

- Состояния и конфигурации изображаются кругами, прямоугольниками и т.п., и начальные обозначаются двойным контуром
- Переходы изображаются стрелками, и взаимодействия переходов изображаются рядом с соответствующими переходами

Узел, изображённый выше, имеет три состояния:

1. Начальное, отправляется сообщение a, и узел переходит в состояние 2
2. Принимается сообщение b, и узел переходит в состояние 3
3. Узел недетерминированно переходит в одно из состояний 1, 2

Распределённые системы и алгоритмы

Формализованной распределённой системой (р.с.) будем называть упорядоченный набор узлов

Формализованным распределённым алгоритмом (р.а.) будем называть множество формализованных р.с.

Система переходов $\mathfrak{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{I}, \to)$ распределённой системы $(p_1, \dots, p_n)$ над множеством сообщений $\mathcal{M}$, где $p_i = (Z_i, I_i, \mapsto_i)$, устроена следующим образом:

- $\mathcal{C} = Z_1 \times \dots \times Z_n \times \mathbb{M}(\mathcal{M})$
- $\mathcal{I} = I_1 \times \dots \times I_n \times \{\emptyset\}$
- Устройство множества $\to$ зависит от того, как именно организован обмен сообщениями между узлами

Иногда для краткости будем говорить «распределённая система», имея в виду систему переходов этой распределённой системы — в том числе «конфигурация р.с.» и «вычисления р.с.»

Распределённые системы и алгоритмы

Два основных способа обмена сообщениями:

- Асинхронный: отправка и приём сообщения происходят независимо, то есть на разных переходах системы
- Синхронный: отправка и приём сообщения происходят одновременно физически или логически, то есть за один переход в системе

Синхронный обмен сообщениями можно представить себе как асинхронный с дополнительным ограничением: переход узла после отправки сообщения обязан принимать это сообщение

В курсе основное внимание будет уделено системам и алгоритмам с асинхронным обменом сообщениями

Распределённые системы и алгоритмы с асинхронным обменом сообщениями

Будем говорить, что переход $\tau = (s, \sigma, s')$ k-го узла открыт в конфигурации $\gamma = (s_1, \dots, s_n, M)$, если $s = s_k$ и верно хотя бы одно из двух:

- $\sigma = m?$ и $m \in M$
- $\sigma = m!$ или $\sigma = \lambda$

Иначе будем говорить, что переход τ k-го узла закрыт в γ

Результатом выполнения $\tau^{(k)}(\gamma)$ открытого перехода $\tau = (s, \sigma, s')$ k-го узла в конфигурации $\gamma = (s_1, \dots, s_n, M)$ будем называть конфигурацию $(s_1, \dots, s_{k-1}, s', s_{k+1}, \dots, s_n, M')$, где:

- $M' = M$, если $\sigma = \lambda$
- $M' = M + \{m\}$, если $\sigma = m!$
- $M' = M - \{m\}$, если $\sigma = m?$

Распределённые системы и алгоритмы с асинхронным обменом сообщениями

Переходу τ k-го узла р.с. отвечает множество переходов системы $\xrightarrow{\tau,k}$, содержащее всевозможные пары вида $\gamma \xrightarrow{\tau,k} \tau^{(k)}(\gamma)$ для конфигураций γ, таких что τ открыт в γ

Действием узла будем называть всякое множество переходов этого узла

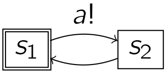
Действие узла α будем называть допустимым в конфигурации γ, если хотя бы один переход из α открыт в γ

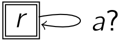
Действию α k-го узла р.с. отвечает множество переходов системы $\xrightarrow{\alpha,k} = \cup_{\tau\in\alpha} \xrightarrow{\tau,k}$

Отношение переходов с.п. р.с. $(p_1, \dots, p_n)$ с асинхронным обменом сообщениями, где $p_i = (Z_i, I_i, \mapsto_i)$, имеет вид $\xrightarrow{\mapsto_1,1} \cup \dots \cup \xrightarrow{\mapsto_n,n}$

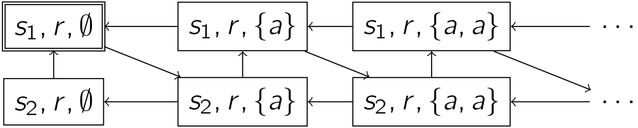
Распределённые системы и алгоритмы с асинхронным обменом сообщениями

Пример





Система переходов распределённой системы с асинхронным обменом сообщениями, состоящей из этих двух узлов, устроена так:



Распределённые системы и алгоритмы с синхронным обменом сообщениями

Рассмотрим р.с. $(p_1, \ldots, p_n)$ над множеством сообщений $\mathcal{M}$, где $p_i = (Z_i, I_i, \mapsto_i)$

Пусть $\mapsto_i^\sigma$ — действие узла p_i, состоящее из всех его переходов с взаимодействием σ

Передаче сообщения m от k-го узла ℓ-му, где $k \neq \ell$, отвечает множество переходов системы $\xrightarrow{k-m-\ell}$, состоящее из всех пар $\gamma \xrightarrow{k-m-\ell} \delta$, таких что $\gamma \xrightarrow{\mapsto_k^{m!}} \gamma' \xrightarrow{\mapsto_\ell^{m?}} \delta$

Отношение переходов с.п. р.с. $(p_1, \ldots, p_n)$ с синхронным обменом сообщениями, где $p_i = (Z_i, I_i, \mapsto_i)$, имеет вид

$$\xrightarrow{\mapsto_1^\lambda, 1} \cup \cdots \cup \xrightarrow{\mapsto_n^\lambda, n} \cup \bigcup_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n \\ k \neq \ell}} \xrightarrow{k-m-\ell}$$

Распределённые системы и алгоритмы с синхронным обменом сообщениями

Можно легко убедиться в том, что в любой достижимой конфигурации с.п. р.с. с синхронным обменом сообщениями не содержится ни одного сообщения

Поэтому будем опускать мультимножество сообщений в записи конфигураций такой с.п.

Пример

Система переходов распределённой системы с синхронным обменом сообщениями, состоящей из узлов, изображённых выше, устроена так: