

# Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

## Блок 4

Системы переходов

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Требование **строгости** анализа правильности р.а. означает, что необходимо иметь подходящую **математическую модель** р.с., в которой реализован этот алгоритм:

- ▶ Достаточно точную и детальную, чтобы интересующие свойства модели адекватно отвечали свойствам моделируемой р.с.
- ▶ Достаточно просто устроенную, чтобы можно было разумно и наглядно использовать её для анализа р.а.
- ▶ Достаточно общую, чтобы можно было применять её для анализа разнообразных р.а. и р.с.

Вычисление распределённой системы обычно можно представить как упорядоченную дискретную совокупность **действий (событий)**, выполняющихся (реализующихся; происходящих) в её узлах и отвечающих небольшим изменениям **конфигурации** системы (её **глобального состояния**)

Конфигурация системы представляет собой совокупность **локальных состояний** её узлов и состояний её коммуникационной подсистемы

Способ изменения текущей конфигурации при выполнении действия можно задать в виде семейства **переходов**, аналогичных переходам в конечном автомате и отвечающих изменению части конфигурации системы, доступной узлу

# Система переходов

Системой переходов (с.п.) будем называть тройку  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \rightarrow)$ , где:

- ▶  $\mathcal{C}$  — непустое множество **конфигураций**
- ▶  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$  — подмножество **начальных** конфигураций
- ▶  $\rightarrow \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  — множество **переходов системы**

Систему переходов можно понимать как размеченный ориентированный граф:

- ▶ возможно, бесконечный
- ▶ с петлями и без кратных дуг
- ▶  $\mathcal{C}$  — множество вершин
- ▶ вершины множества  $\mathcal{I}$  помечены как начальные
- ▶  $\rightarrow$  — множество дуг

В связи с этим будем применять к с.п. известные обозначения и терминологию из теории графов

# Система переходов

Путь в с.п., исходящий из начальной конфигурации, будем называть **начальным**

Конфигурацию с.п. назовём **заключительной** (или, по-другому, **тупиковой**), если из неё не исходит ни одной дуги

Путь в с.п. будем называть **максимальным**, если он бесконечен или оканчивается в заключительной конфигурации

**Вычислением** с.п. будем называть её максимальный начальный путь

Для конфигураций  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с.п.  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \rightarrow)$  записью  $\gamma_1 \rightarrow^* \gamma_2$  будем обозначать факт достижимости  $\gamma_2$  из  $\gamma_1$  (то есть  $\rightarrow^*$  — рефлексивно-транзитивное замыкание двуместного отношения  $\rightarrow$ )

Конфигурацию с.п. будем называть **достижимой**, если она достижима хотя бы из одной начальной конфигурации

# Мультимножество

$\mathbb{N}_0$  — так будем обозначать множество всех целых неотрицательных чисел:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Для множества  $X$  **мультимножество** с основой  $X$  — это отображение вида  $M : X \rightarrow \mathbb{N}_0$

*Содержательно*, мультимножество — это неупорядоченная совокупность элементов, в которой (в отличие от «просто» множества) каждый элемент может встречаться произвольное число раз

Значение  $M(x)$  для мультимножества  $M$  и элемента  $x$  называется **кратностью** (количеством вхождений)  $x$  в  $M$

Если  $M(x) = 0$ , то элемент  $x$  **не входит** в мультимножество  $M$

$\mathbb{M}(X)$  — так обозначим семейство всех мультимножеств с основой  $X$

Конечное мультимножество можно задать списком элементов, как и конечное множество:  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , где элементы  $x_i$  могут повторяться, и каждый элемент записан столько раз, какова его кратность

# Мультимножество

Основные операции и отношения над мультимножествами  $M, N$  с одной основой  $X$ :

- ▶  $x \in M$  — отношение **принадлежности** элемента мультимножеству:

$$x \in M \Leftrightarrow M(x) > 0$$

- ▶  $M \cup N$  — **объединение** мультимножеств:

$$(M \cup N)(x) = \max(M(x), N(x))$$

- ▶  $M + N$  — **сумма** мультимножеств:  $(M + N)(x) = M(x) + N(x)$

- ▶  $M \cap N$  — **пересечение** мультимножеств:  $(M \cap N)(x) = \min(M(x), N(x))$

- ▶  $M - N$  — **разность** мультимножеств:  $(M - N)(x) = M(x) \dot{-} N(x)$ , где

$\dot{-}$  — операция **усечённой разности**:

$$i \dot{-} j = \begin{cases} i - j, & \text{если } i \geq j; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

# Мультимножество

## Примеры:

▶  $\{a, a, b\}(a) = 2, \quad \{a, a, b\}(b) = 1, \quad \{a, a, b\}(c) = 0$

▶  $a \in \{a, a, b\}, \quad b \in \{a, a, b\}, \quad c \notin \{a, a, b\}$

▶  $\{a, a, b\} \cup \{a, b, b, c\} = \{a, a, b, b, c\}$

▶  $\{a, a, b\} + \{a, b, b, c\} = \{a, a, a, b, b, b, c\}$

▶  $\{a, a, a, b, b, b, c\} \cap \{a, a, b, c, c\} = \{a, a, b, c\}$

▶  $\{a, a, a, b, b, b, c\} - \{a, a, b, c, c\} = \{a, b, b\}$



# Система переходов узла

$\mathcal{M}$  — так будем обозначать множество **сообщений**, используемых в системе

Будем использовать следующие записи для обозначения **взаимодействия** с коммуникационной подсистемой:

- ▶  $m!$ , где  $m \in \mathcal{M}$  — **отправка** сообщения  $m$  в коммуникационную подсистему
- ▶  $m?$ , где  $m \in \mathcal{M}$  — **приём** сообщения  $m$  из коммуникационной подсистемы
- ▶  $\lambda$  — отсутствие взаимодействия

$\mathcal{M}?!$  — так будем обозначать множество

$$\{m! \mid m \in \mathcal{M}\} \cup \{m? \mid m \in \mathcal{M}\} \cup \{\lambda\}$$

# Система переходов узла

Формализованным **узлом** над множеством сообщений  $\mathcal{M}$  назовём систему  $(Z, I, \mapsto)$ , где:

- ▶  $Z$  — непустое множество **состояний**
- ▶  $I \subseteq Z$  — подмножество **начальных** состояний
- ▶  $\mapsto \subseteq Z \times \mathcal{M} \times Z$  — множество **переходов узла**

Переход  $(s, \sigma, s')$  будем понимать как дугу графа, помеченную символом  $\sigma$ :  $s \xrightarrow{\sigma} s'$

В изображении дуги  $s \xrightarrow{\lambda} s'$  будем иногда опускать « $\lambda$ »:

$$(s \xrightarrow{\lambda} s') = (s \mapsto s')$$

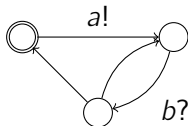
Будем говорить, что при выполнении перехода, помеченного отправкой  $m!$ , приёмом  $m?$  и символом  $\lambda$ , соответственно **отправляется** сообщение  $m$ , **принимается** сообщение  $m$  и **нет взаимодействия**

Узел можно понимать как с.п. с доразмеченными переходами и другими названиями вершин для меньшей путаницы:

- ▶ В системе (глобально) — «**конфигурация**»
- ▶ В узле (локально) — «**состояние**»

# Система переходов узла

## Пример:



Здесь и далее:

- ▶ Состояния и конфигурации изображаются кругами, прямоугольниками и т.п., и начальные обозначаются двойным контуром
- ▶ Переходы изображаются стрелками, и взаимодействия переходов изображаются рядом с соответствующими переходами

Узел, изображённый выше, имеет три состояния:

1. Начальное, отправляется сообщение  $a$ , и узел переходит в состояние 2
2. Принимается сообщение  $b$ , и узел переходит в состояние 3
3. Узел недетерминированно переходит в одно из состояний 1, 2

# Распределённые системы и алгоритмы

Формализованной **распределённой системой** (р.с.) будем называть упорядоченный набор узлов

Формализованным **распределённым алгоритмом** (р.а.) будем называть множество формализованных р.с.

**Система переходов**  $\mathfrak{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{I}, \rightarrow)$  **распределённой системы**  $(p_1, \dots, p_n)$  над множеством сообщений  $\mathcal{M}$ , где  $p_i = (Z_i, l_i, \mapsto_i)$ , устроена следующим образом:

- ▶  $\mathcal{C} = Z_1 \times \dots \times Z_n \times \mathbb{M}(\mathcal{M})$
- ▶  $\mathcal{I} = l_1 \times \dots \times l_n \times \{\emptyset\}$
- ▶ Устройство множества  $\rightarrow$  зависит от того, как именно организован обмен сообщениями между узлами

Иногда для краткости будем говорить «распределённая система», имея в виду систему переходов этой распределённой системы — в том числе «конфигурация р.с.» и «вычисления р.с.»

# Распределённые системы и алгоритмы

Два основных способа обмена сообщениями:

- ▶ **Асинхронный**: отправка и приём сообщения происходят независимо, то есть на разных переходах системы
- ▶ **Синхронный**: отправка и приём сообщения происходят одновременно физически или логически, то есть за один переход в системе

Синхронный обмен сообщениями можно представить себе как асинхронный с дополнительным ограничением: переход узла после отправки сообщения обязан принимать это сообщение

В курсе основное внимание будет уделено системам и алгоритмам с асинхронным обменом сообщениями

# Распределённые системы и алгоритмы с асинхронным обменом сообщениями

Будем говорить, что переход  $\tau = (s, \sigma, s')$   $k$ -го узла **открыт** в конфигурации  $\gamma = (s_1, \dots, s_n, M)$ , если  $s = s_k$  и верно хотя бы одно из двух:

- ▶  $\sigma = m?$  и  $m \in M$
- ▶  $\sigma = m!$  или  $\sigma = \lambda$

Иначе будем говорить, что переход  $\tau$   $k$ -го узла **закрит** в  $\gamma$

**Результатом выполнения**  $\tau^{(k)}(\gamma)$  открытого перехода  $\tau = (s, \sigma, s')$   $k$ -го узла в конфигурации  $\gamma = (s_1, \dots, s_n, M)$  будем называть конфигурацию  $(s_1, \dots, s_{k-1}, s', s_{k+1}, \dots, s_n, M')$ , где:

- ▶  $M' = M$ , если  $\sigma = \lambda$
- ▶  $M' = M + \{m\}$ , если  $\sigma = m!$
- ▶  $M' = M - \{m\}$ , если  $\sigma = m?$

# Распределённые системы и алгоритмы с асинхронным обменом сообщениями

Переходу  $\tau$   $k$ -го узла р.с. отвечает множество переходов системы  $\xrightarrow{\tau, k}$ , содержащее всевозможные пары вида  $\gamma \xrightarrow{\tau, k} \tau^{(k)}(\gamma)$  для конфигураций  $\gamma$ , таких что  $\tau$  открыт в  $\gamma$

**Действием** узла будем называть всякое множество переходов этого узла

Действие узла  $\alpha$  будем называть **допустимым** в конфигурации  $\gamma$ , если хотя бы один переход из  $\alpha$  открыт в  $\gamma$

Действию  $\alpha$   $k$ -го узла р.с. отвечает множество переходов системы  $\xrightarrow{\alpha, k} = \cup_{\tau \in \alpha} \xrightarrow{\tau, k}$

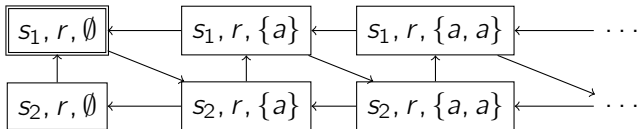
Отношение переходов с.п. р.с.  $(p_1, \dots, p_n)$  с асинхронным обменом сообщениями, где  $p_i = (Z_i, l_i, \mapsto_i)$ , имеет вид  $\xrightarrow{\mapsto_1, 1} \cup \dots \cup \xrightarrow{\mapsto_n, n}$

# Распределённые системы и алгоритмы с асинхронным обменом сообщениями

## Пример



Система переходов распределённой системы с асинхронным обменом сообщениями, состоящей из этих двух узлов, устроена так:





# Распределённые системы и алгоритмы с синхронным обменом сообщениями

Рассмотрим р.с.  $(p_1, \dots, p_n)$  над множеством сообщений  $\mathcal{M}$ , где  $p_i = (Z_i, l_i, \mapsto_i)$

Пусть  $\mapsto_i^\sigma$  — действие узла  $p_i$ , состоящее из всех его переходов с взаимодействием  $\sigma$

Передаче сообщения  $m$  от  $k$ -го узла  $\ell$ -му, где  $k \neq \ell$ , отвечает множество переходов системы  $\xrightarrow{k-m-\ell}$ , состоящее из всех пар  $\gamma \xrightarrow{k-m-\ell} \delta$ , таких что  $\gamma \xrightarrow{k}^m \gamma' \xrightarrow{\ell}^m \delta$

Отношение переходов с.п. р.с.  $(p_1, \dots, p_n)$  с синхронным обменом сообщениями, где  $p_i = (Z_i, l_i, \mapsto_i)$ , имеет вид

$$\xrightarrow{1,1}^{\lambda,1} \cup \dots \cup \xrightarrow{n,n}^{\lambda,n} \cup \bigcup_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n \\ k \neq \ell}} \xrightarrow{k-m-\ell}$$

# Распределённые системы и алгоритмы с синхронным обменом сообщениями

Можно легко убедиться в том, что в любой достижимой конфигурации с.п. р.с. с синхронным обменом сообщениями не содержится ни одного сообщения

Поэтому будем опускать мультимножество сообщений в записи конфигураций такой с.п.

## Пример



Система переходов распределённой системы с синхронным обменом сообщениями, состоящей из узлов, изображённых выше, устроена так:

