

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 17

Сколемовская стандартная форма (ССФ)

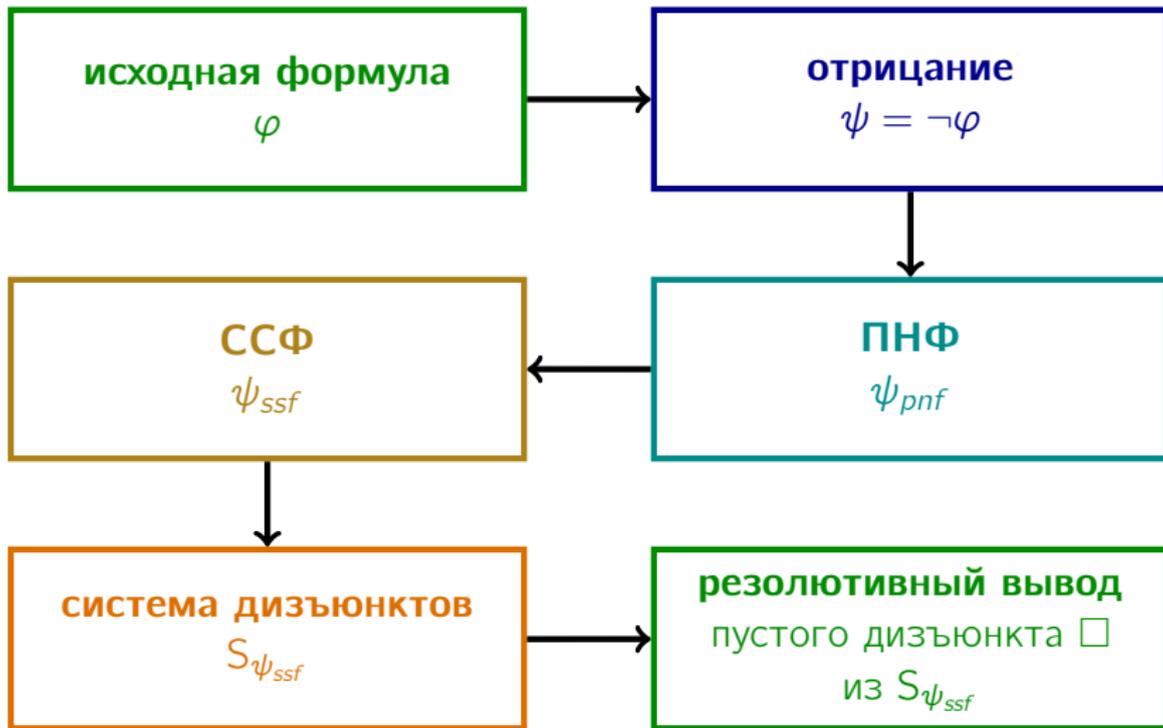
Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

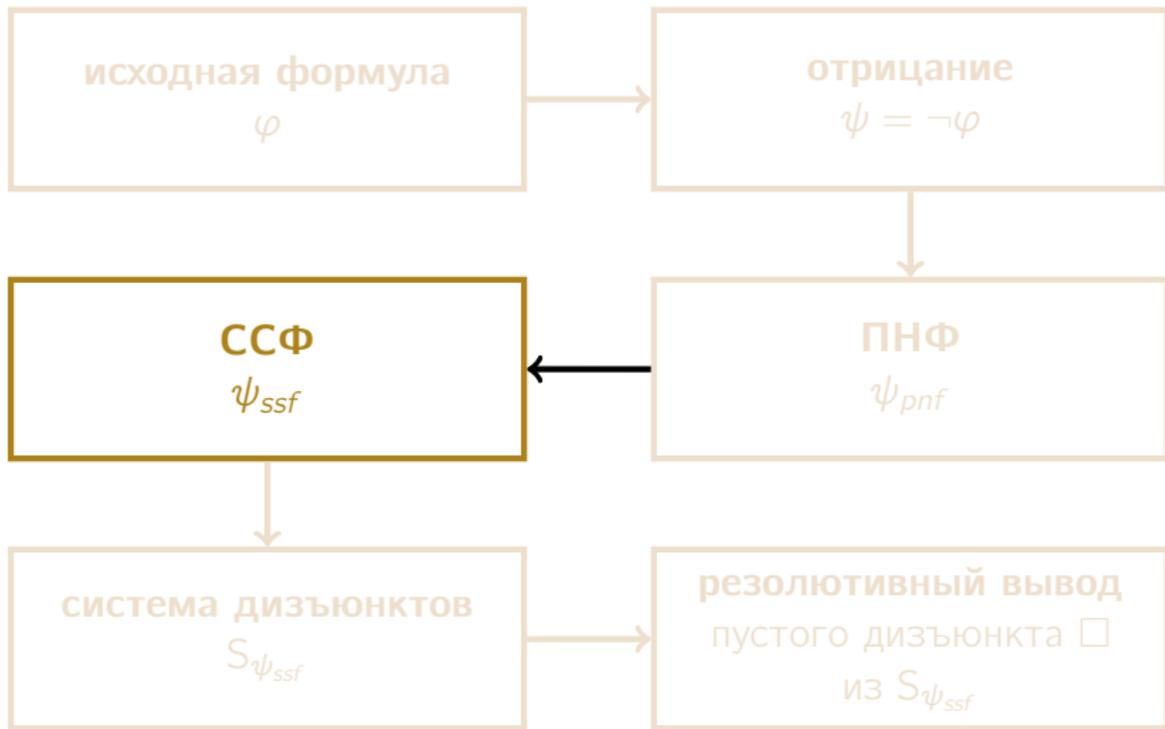
E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf}$$

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в **сколемовской стандартной форме (ССФ)**, если

- ▶ она находится в предварённой нормальной форме и
- ▶ её кванторная приставка не содержит кванторов \exists :

$$\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

Например, формула

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с «находится в ССФ» будем говорить «**является ССФ**»

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ в настолько же (не)выполнимую ССФ

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Небольшая вольность: если слева от \exists не стоит ни одного \forall , то, согласно лемме, f — **0-местный функциональный символ**: так будем называть **константы**, и писать « $f()$ » наряду с « f »

Доказательство (\Leftarrow)

Рассмотрим произвольную модель \mathcal{I} для формулы $\forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$

По семантике « \forall », для любого набора предметов \tilde{d}^n верно

$$\mathcal{I} \models \chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, \bar{f}(\tilde{d}^n)]$

По семантике « \exists », верно $\mathcal{I} \models (\exists x_{n+1} \chi)[\tilde{d}^n]$

По семантике « \forall », так как набор предметов \tilde{d}^n произволен, верно и $\mathcal{I} \models \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Доказательство (\Rightarrow)

Рассмотрим произвольную модель \mathcal{I} для формулы φ

По семантике « \forall » и « \exists », для любого набора предметов \tilde{d}^n существует предмет d_{n+1} , такой что $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, d_{n+1}]$

По \mathcal{I} построим **новую** интерпретацию \mathcal{J} :

если в сигнатуре был функциональный символ f , удалим его
добавим в сигнатуру функциональный символ $f^{(n)}$
оценим f так, чтобы выполнялось равенство $\bar{f}(\tilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi[\tilde{d}^n, \bar{f}(\tilde{d}^n)]$, а значит, и $\mathcal{J} \models \chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$

По семантике « \forall », так как набор предметов \tilde{d}^n произволен, верно и $\mathcal{J} \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$ ▼

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Устранение квантора \exists с введением новых символов с целью получить более простую «хорошую» формулу обычно называют **сколемизацией** (здесь «хорошая» — сохраняющая выполнимость и невыполнимость)

При устранении \exists на место удаляемой переменной подставляются **сколемовские термы** (здесь — $f(\tilde{x}^n)$)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \Leftrightarrow Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор \exists , самый левый \exists удаляется при помощи подстановки сколемовского терма:

$$\varphi_{pnf} = \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots \chi$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots (\chi\{x_k/\mathbf{f}_1(x_1, \dots, x_{k-1})\})$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \dots$$

$$(\chi\{x_k/\mathbf{f}_1(x_1, \dots, x_{k-1}), x_m/\mathbf{f}_2(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{m-1})\})$$

...

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно (!)** при удалении очередного \exists каждый раз выбирать **новый** функциональный символ: не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений

Алгоритм сколемизации ПНФ

Пример:

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- ▶ **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- ▶ **g** — любой функциональный символ местности 1, кроме f

Алгоритм сколемизации ПНФ

Другой пример:

$$\exists u \exists v \forall w \exists x \forall y \exists z (P(u, v) \& P(v, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, u))$$
$$\exists v \forall w \exists x \forall y \exists z (P(\mathbf{c}, v) \& P(v, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, \mathbf{c}))$$
$$\forall w \exists x \forall y \exists z (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \& P(\mathbf{d}, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, \mathbf{c}))$$
$$\forall w \forall y \exists z (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \& P(\mathbf{d}, w) \& P(w, \mathbf{f}(w)) \& P(\mathbf{f}(w), y) \& P(y, z) \& P(z, \mathbf{c}))$$
$$\forall w \forall y (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \& P(\mathbf{d}, w) \& P(w, \mathbf{f}(w)) \& \\ P(\mathbf{f}(w), y) \& P(y, \mathbf{g}(w, y)) \& P(\mathbf{g}(w, y), \mathbf{c}))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- ▶ **c** — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- ▶ **d** — любая константа, кроме c
- ▶ **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- ▶ **g** — любой функциональный символ местности 2 (ни один не содержится в формуле)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Теорема (о сколемизации). Для любой ПНФ φ_{pnf} формула $Sk(\varphi_{pnf})$ является ССФ, для которой верно следующее:

$$\models \varphi_{pnf} \Leftrightarrow \models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов \exists (по одному) согласно алгоритму сколемизации ($\psi_1 = \varphi_{pnf}$, $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$)

По лемме об удалении квантора \exists , справедливы равносильности

$$\models \varphi_{pnf} \Leftrightarrow \models \psi_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \models Sk(\varphi_{pnf}) \blacktriangledown$$

А если в формулировке теоремы заменить «выполнима» (\models) на «общезначима» (\vDash), останутся ли верными \Rightarrow и \Leftarrow ?