Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 38

Хорновские логические программы:
деревья SLD-резолютивных вычислений,
стратегии вычисления и их полнота,
стандартная стратегия вычисления

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1: \ \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}) \leftarrow \mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y});\\
&\mathcal{R}_2: \ \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{X}) \leftarrow \mathrm{r}(\mathtt{X});\\
&\mathcal{R}_3: \mathrm{q}(\mathbf{b}); \quad \mathcal{R}_4: \mathrm{r}(\mathbf{c}); \quad \mathcal{R}_5: \mathrm{s}(\mathbf{b});
\end{aligned}$$

Запросом $?\mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X})$ к этой программе порождаются, например, такие SLD-резолютивные вычисления, построенные согласно стандартному правилу выбора подцели:

$$\begin{array}{c}
?\mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X})\\
\mathcal{R}_1' \downarrow \theta_1 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}'/\mathtt{Y}\}\\
?\mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X})\\
\mathcal{R}_3' \downarrow \theta_2 = \{\mathtt{X}/\mathbf{b}\}\\
?\mathrm{r}(\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathbf{b})\\
\mathcal{R}_4' \downarrow \theta_3 = \{\mathtt{Y}/\mathbf{c}\}\\
?\mathrm{s}(\mathbf{b})\\
\mathcal{R}_5' \downarrow \theta_4 = \varepsilon\\
\square
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
?\mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}), \mathrm{s}(\mathtt{X})\\
\mathcal{R}_2' \downarrow \eta_1 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}/\mathtt{X}\}\\
?\mathrm{r}(\mathtt{X}), \mathrm{s}(\mathtt{X})\\
\mathcal{R}_4' \downarrow \eta_2 = \{\mathtt{X}/\mathbf{c}\}\\
?\mathrm{s}(\mathbf{c})\\
\text{тупик}
\end{array}$$

Вступление

Способ выбора правил программы при построении SLD-резолютивных вычислений существенно влияет на то, какой именно результат будет получен (и будет ли получен хоть какой-нибудь результат)

Этот факт нетруден для осознания:

- Правило — это описание одного из способов решения рассматриваемой задачи
- Бывают как успешные, так и неуспешные способы решения задач
  - Например, если заданный элемент списка располагается только в голове, то искать его в хвосте — заведомый неуспех
- Задачу можно успешно решать по-разному, получая разные ответы
  - Например, если в ответе требуется произвольный элемент списка, то можно выдать голову списка, или голову его хвоста, или голову хвоста его хвоста, ...

Чтобы умело рассуждать о способах выбора правил для получения ответов, объединим всевозможные SLD-резолютивные вычисления программ в единую удобную структуру

Деревья SLD-резолютивных вычислений ХЛП

Дерево SLD-резолютивных вычислений для запроса $\mathcal{Q}$ к программе $\mathcal{P}$ и правила выбора подцели $\mathfrak{R}$, — это размеченное корневое ориентированное (возможно, бесконечное) дерево $T^{\mathfrak{R}}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$, устроенное так:

1. Каждая вершина помечена запросом
2. Корень помечен запросом $\mathcal{Q}$
3. Ду́ги имеют вид $\boxed{\mathcal{Q}_1} \xrightarrow{\mathcal{R},\theta} \boxed{\mathcal{Q}_2}$:
   - $\mathcal{Q}_2$ — SLD-резольвента $\mathcal{Q}_1$ и утверждения из $\mathcal{P}$ с вариантом $\mathcal{R}$ и унификатором θ
   - Резольвента строится для подцели $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ — вычисление от корня до изображённой вершины $\boxed{\mathcal{Q}_1}$
   - Дуги из $\boxed{\mathcal{Q}_1}$ отвечают выбору всевозможных правил из $\mathcal{P}$ для построения резольвент с $\mathcal{Q}_1$ и упорядочены по порядку записи правил в $\mathcal{P}$
4. Листьями являются запросы, у которых нет ни одной SLD-резольвенты правилами из $\mathcal{P}$

$T_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ — дерево $T^{\mathfrak{R}}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ для стандартного правила $\mathfrak{R}$

Порядок дуг дерева в иллюстрациях — слева направо

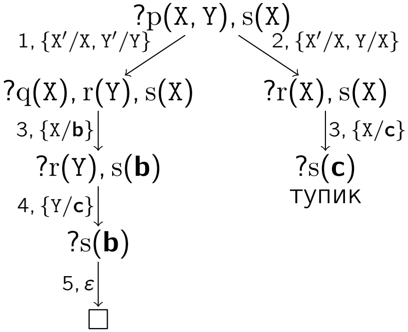
Деревья SLD-резолютивных вычислений ХЛП

Примеры

Программа $\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
&1: \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}) \leftarrow \mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y});\\
&2: \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{X}) \leftarrow \mathrm{r}(\mathtt{X});\\
&3: \mathrm{q}(\mathbf{b}); \quad 4: \mathrm{r}(\mathbf{c}); \quad 5: \ \mathrm{s}(\mathbf{b});
\end{aligned}
$$

Дерево $T_{\mathcal{P},?\mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}),\mathrm{s}(\mathtt{X})}$:



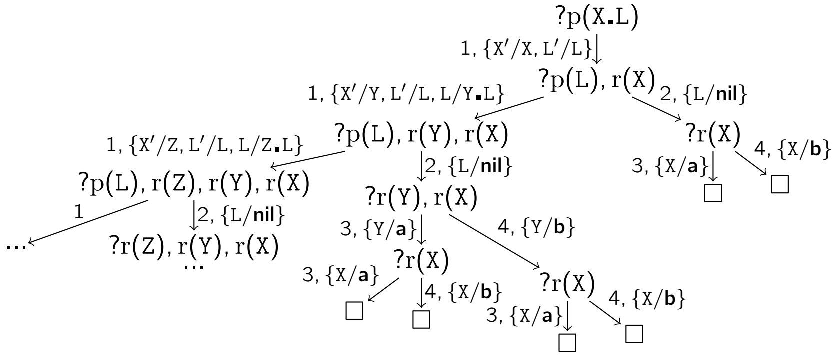
Деревья SLD-резолютивных вычислений ХЛП

Примеры

Программа $\mathcal{P}$:

$$1: \ \mathrm{p}(\mathtt{X}_{\blacksquare}\mathtt{L}) \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{L}), \mathrm{r}(\mathtt{X});$$
$$2: \mathrm{p}(\mathbf{nil}); \quad 3: \mathrm{r}(\mathbf{a}); \quad 4: \mathrm{r}(\mathbf{b});$$

Дерево $T_{\mathcal{P}, ?\mathrm{p}(\mathtt{X}_{\blacksquare}\mathtt{L})}$:



Стратегии вычисления ХЛП

Деревья вычислений бывают разные:

- Конечные и бесконечные
- С конечным и с бесконечным числом ветвей
- Всюду успешные и с тупиками
- Содержащие один ответ, или много ответов, или ни одного ответа

Каждая ветвь в дереве $T^{\mathfrak{R}}_{\mathcal{Q},\mathcal{P}}$ отвечает SLD-резолютивному вычислению программы $\mathcal{P}$ для запроса $\mathcal{Q}$ согласно правилу $\mathfrak{R}$, и в дереве перечислены все такие вычисления

Значит, перебор всех таких вычислений можно устроить как **обход** дерева $T^{\mathfrak{R}}_{\mathcal{Q},\mathcal{P}}$

Стратегии вычисления ХЛП

Стратегия вычисления ХЛП состоит из

- правила выбора подцели и
- способа обхода дерева вычислений

Стратегия вычисления с правилом выбора подцели $\mathfrak{R}$ называется полной, для любого запроса $\mathcal{Q}$ к любой программе $\mathcal{P}$ она позволяет построить (перечислить) все успешные $\mathfrak{R}$-вычисления $\mathcal{P}$ для запроса $\mathcal{Q}$

Деревом SLD-резолютивных вычислений для запроса $\mathcal{Q}$ к программе $\mathcal{P}$, построенным согласно заданной стратегии вычисления, будем называть фрагмент дерева SLD-резолютивных вычислений для $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ и правила выбора подцели из стратегии, состоящий из всех вершин, посещаемых при обходе, и всех соединяющих их дуг

Стратегии вычисления ХЛП

Два основных вида обходов деревьев вычислений ХЛП:

- Обход в ширину: вершины дерева обходятся поярусно по неубыванию удалённости от корня
  - Это можно представить как перебор всех вычислений по возрастанию длины
- Обход в глубину: при обходе из вершины сначала последовательно по порядку обходятся вершины по исходящим дугам, и по окончании обхода выполняется возврат в предыдущую вершину
  - Это можно представить себе как последовательные попытки достроить (одно) рассматриваемое вычисление до более длинного пошагово всеми возможными способами по порядку правил

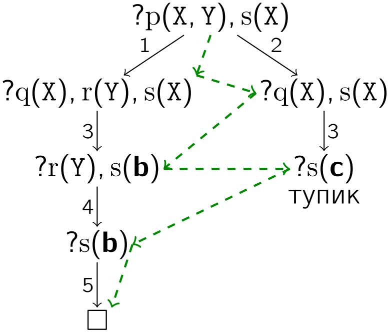
Стратегии вычисления ХЛП

Пример дерева вычислений, построенного согласно стандартному правилу выбора подцели и обходу в ширину

Программа $\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
1 :&\ \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}) \leftarrow \mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y});\\
2 :&\ \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{X}) \leftarrow \mathrm{r}(\mathtt{X});\\
3 :&\, \mathrm{q}(\mathbf{b}); \quad 4 : \mathrm{r}(\mathbf{c}); \quad 5 : \quad \mathrm{s}(\mathbf{b});
\end{aligned}
$$

Дерево вычислений (зелёным пунктиром обозначен порядок обхода вершин дерева):

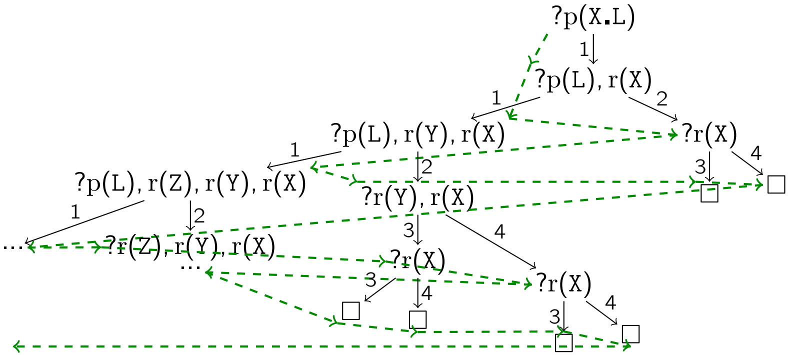


Стратегии вычисления ХЛП

Пример дерева вычислений, построенного согласно стандартному правилу выбора подцели и обходу в ширину

$$1: \quad p(\mathtt{X}.\mathtt{L}) \leftarrow p(\mathtt{L}), r(\mathtt{X});$$
$$2: \quad p(\mathbf{nil}); \quad 3: \quad r(\mathbf{a}); \quad 4: \quad r(\mathbf{b});$$

Дерево $T_{\mathcal{P},?p(\mathtt{X}.\mathtt{L})}$:



Стратегии вычисления ХЛП

Стратегия обхода в ширину полна:

- Из каждой вершины исходит конечное число дуг (не больше чем правил в программе), а значит, каждый ярус дерева конечен
- Каждая вершина каждого яруса рано или поздно будет посещена
- Каждое успешное вычисление конечно, а значит, завершается на некотором ярусе
- Значит, каждое успешное вычисление рано или поздно будет построено

Но у этой стратегии есть и серьёзный недостаток, присущий обходам больших графов в ширину:

- При обходе нужно хранить в памяти **все** вершины очередного яруса
- Число таких вершин может расти экспоненциально относительно номера яруса
  - *можете посчитать, на каком ярусе двоичного дерева или, например, дерева со степенью ветвления 4 содержится гуго́л вершин*

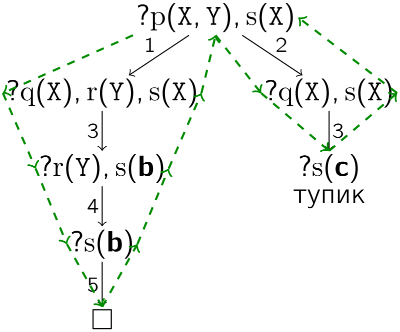
Стратегии вычисления ХЛП

Пример дерева вычислений, построенного согласно стандартному правилу выбора подцели и обходу в глубину

Программа $\mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{l}
1:\ \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}) \leftarrow \mathrm{q}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{Y});\\
2:\ \ \mathrm{p}(\mathtt{X},\mathtt{X}) \leftarrow \mathrm{r}(\mathtt{X});\\
3: \mathrm{q}(\mathbf{b});\quad 4: \mathrm{r}(\mathbf{c});\quad 5:\quad \mathrm{s}(\mathbf{b});
\end{array}
$$

Дерево вычислений:

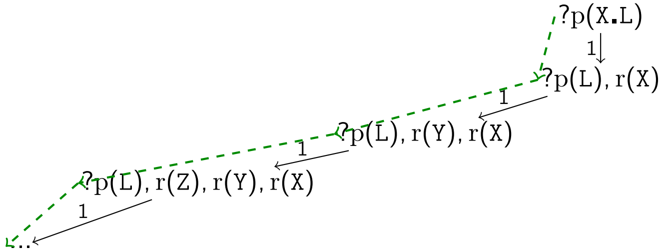


Стратегии вычисления ХЛП

Пример дерева вычислений, построенного согласно стандартному правилу выбора подцели и обходу в глубину

$$1: \ \ \mathrm{p}(\mathtt{X.L}) \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{L}), \mathrm{r}(\mathtt{X});$$
$$2: \mathrm{p}(\mathbf{nil}); \quad 3: \mathrm{r}(\mathbf{a}); \quad 4: \mathrm{r}(\mathbf{b});$$

Дерево вычислений:



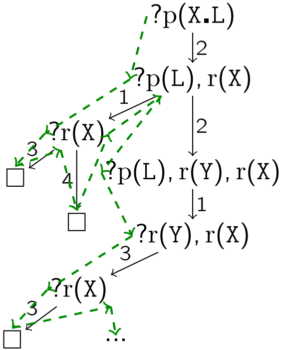
До бесконечности обходится самая левая ветвь дерева, ни одно успешное вычисление не найдено

Стратегии вычисления ХЛП

Пример дерева вычислений, построенного согласно стандартному правилу выбора подцели и обходу в глубину

$$\begin{aligned} &1 : p(\mathbf{nil});\\ &2 : \ p(\mathtt{X.L}) \leftarrow p(\mathtt{L}), r(\mathtt{X});\\ &3 : r(\mathbf{a}); \qquad 4 : r(\mathbf{b}); \end{aligned}$$

Дерево вычислений:



Стандартная стратегия вычисления ХЛП

По этим примерам видно, что стратегия, основанная на обходе в глубину

- неполна и
- чувствительна к порядку правил: даже если успешных вычислений сколь угодно много, в зависимости от порядка правил могут быть
  - найдены они все, или
  - найдены некоторые успешные вычисления, но не все, или
  - не найдены никакие успешные вычисления

Но использование этой стратегии позволяет избежать проблем с использованием памяти, возникающих при обходе в ширину, и она удобна и достаточно эффективна для использования на практике

Поэтому в стандартной стратегии вычисления ХЛП, используемой обычно в интерпретаторах, используются стандартное правило выбора подцели и обход в глубину

Выбор надлежащего порядка правил и атомов в телах правил при этом становится задачей программиста