Упражнения по аксиоматической теории множеств

Описание теории множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC)

Сигнатура теории: $\langle \emptyset, \emptyset, \{\in^{(2)}\} \rangle$. Предметы модели теории ZFC называются *множествами*. Оценка символа $\in$ называется *отношением принадлежности элемента множеству*. Первый аргумент этого отношения называется *элементом* второго аргумента.

Аксиомы и схемы аксиом теории ZFC, записанные на естественном языке:

1. *Аксиома объёмности*: если множества $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ состоят из одних и тех же элементов, то они равны.
2. *Схема выделения* $[\varphi]$: если φ не содержит свободной переменной $\mathtt{X}$, то для любого множества $\mathtt{X}$ существует множество $\{y \mid y \in \mathtt{X} \,\&\, \varphi\}$.
3. *Аксиома пустого множества*: пустое множество существует.
4. *Аксиома пары*: для любых множеств $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$ существует множество $\{\mathtt{X}, \mathtt{Y}\}$.
5. *Аксиома объединения*: для любого множества $\mathtt{X}$ существует множество $\bigcup \mathtt{X}$, являющееся объединением всех его элементов.
6. *Аксиома бесконечности*: существует множество, включающее в себя теоретико-множественные представления всех натуральных чисел.
7. *Аксиома степени*: для любого множества $\mathtt{X}$ существует множество всех подмножеств $\mathtt{X}$.
8. *Схема преобразования* $[\varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y})]$: для любого множества $\mathtt{X}$ верно: если $\varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ — функция, всюду определённая на $\mathtt{X}$, то существует множество всех образов элементов $\mathtt{X}$.
9. *Аксиома регулярности*: в любом семействе (*то есть множестве*) множеств содержится наименьшее по включению множество.
10. *Аксиома выбора*: для любого семейства непустых множеств существует функция, всюду определённая на этом семействе и отображающая каждое множество в некоторый элемент этого множества.

Упражнение 1

Используя сигнатуру теории ZFC, расширенную с помощью определений, определить следующие символы адекватно содержательному описанию их значения.

1. $\emptyset$: пустое множество;
2. $\cap^{(2)}$: $\mathtt{x} \cap \mathtt{y}$ — пересечение множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
3. $\cup^{(2)}$: $\mathtt{x} \cup \mathtt{y}$ — объединение множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
4. $\bigcup^{(1)}$: $\bigcup(\mathtt{x})$ — объединение всех множеств, являющихся элементами $\mathtt{x}$;
5. $\setminus^{(2)}$: $\mathtt{x} \setminus \mathtt{y}$ — разность множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
6. $\Delta^{(2)}$: $\mathtt{x} \Delta \mathtt{y}$ — симметрическая разность множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
7. $!^{(1)}$: $!\mathtt{x}$ — дополнение множества $\mathtt{x}$;
8. $\{\cdot\}^{(1)}$: $\{\mathtt{x}\}$ множество из одного элемента $\mathtt{x}$;
9. $\{\cdot, \cdot\}^{(2)}$: $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$ неупорядоченная пара элементов $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$;
10. $(\cdot, \cdot)^{(2)}$: $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ — упорядоченная пара элементов $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$;
11. $\mathbf{fst}^{(1)}$: $\mathbf{fst}(\mathtt{x})$ — первый элемент упорядоченной пары $\mathtt{x}$;
12. $\mathbf{snd}^{(1)}$: $\mathbf{snd}(\mathtt{x})$ — второй элемент упорядоченной пары $\mathtt{x}$;
13. $\times^{(2)}$: $\mathtt{x} \times \mathtt{y}$ — декартово произведение множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;

14. $\mathrm{BinRel}^{(1)}$: $\mathrm{BinRel}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — бинарное отношение;
15. $\mathrm{Fun}^{(2)}$: $\mathrm{Fun}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — функция, всюду определённая на множестве $\mathtt{y}$;
16. $\mathrm{PartFun}^{(2)}$: $\mathrm{PartFun}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — функция, частично определённая на множестве $\mathtt{y}$;
17. $\mathbf{dom}^{(1)}$: $\mathbf{dom}(\mathtt{x})$ — область определения функции $\mathtt{x}$;
18. $\mathbf{val}^{(1)}$: $\mathbf{val}(\mathtt{x})$ — область значений функции $\mathtt{x}$;
19. $\mathrm{PartOrd}^{(1)}$: $\mathrm{PartOrd}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — частично упорядоченное множество;
20. $\mathrm{TotOrd}^{(1)}$: $\mathrm{TotOrd}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — линейно упорядоченное множество;
21. $\mathrm{Minimal}^{(2)}$: $\mathrm{Minimal}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — минимальный элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
22. $\mathrm{Least}^{(2)}$: $\mathrm{Least}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — наименьший элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
23. $\mathrm{Maximal}^{(2)}$: $\mathrm{Maximal}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — максимальный элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
24. $\mathrm{Greatest}^{(2)}$: $\mathrm{Greatest}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — наибольший элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
25. ${\mathrm{Nat}_0}^{(1)}$: $\mathrm{Nat}_0(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — натуральное число (*или ноль*);
26. $\mathbf{S}^{(1)}$: $\mathbf{S}(\mathtt{x})$ — число, следующее за натуральным числом $\mathtt{x}$;
27. $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$: натуральные числа 0, 1, 2, 3;
28. $+^{(2)}$: $\mathtt{x} + \mathtt{y}$ — сумма натуральных чисел $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
29. $*^{(2)}$: $\mathtt{x} * \mathtt{y}$ — произведение натуральных чисел $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
30. $\mathrm{Finite}^{(1)}$: $\mathrm{Finite}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — конечное множество;
31. $\mathrm{Ord}^{(1)}$: $\mathrm{Ord}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — ординал;
32. $|\cdot|^{(1)}$: $|x|$ — мощность множества $\mathtt{x}$;
33. $\mathrm{FinSeq}^{(1)}$: $\mathrm{FinSeq}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — конечная последовательность;
34. $\mathrm{Seq}^{(1)}$: $\mathrm{Seq}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — последовательность;
35. $\mathrm{Real}^{(1)}$: $\mathrm{Real}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — действительное число.

Упражнение 2

Используя определения, исключить из формулы символы, не входящие в сигнатуру теории ZFC.

1. $(\mathtt{X} \cup \mathtt{Y}) \setminus \mathtt{Z} = (\mathtt{X} \setminus \mathtt{Z}) \cup (\mathtt{Y} \setminus \mathtt{Z})$;
2. $|\mathtt{X} \times \mathtt{Y}| = |\mathtt{X}| * |\mathtt{Y}|$;
3. $\mathtt{X} + \mathtt{Y} = \mathtt{Y} + \mathtt{X}$;
4. $\mathtt{X} + \mathbf{0} = \mathtt{X}$.

Упражнение 3

Используя аксиомы теории ZFC, доказать, что в любой модели этой теории существуют следующие множества.

1. множество всех элементов, минимальных по включению в *существующем* множестве;
2. множество всех натуральных чисел, содержащих “н” в названии;
3. множество всех арифметических функций;
4. декартово произведение *существующих* множеств.

Упражнение 4

Используя аксиомы теории ZFC, доказать, что ни в какой модели этой теории не существует следующих множеств.

1. множество всех множеств;
2. множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента;
3. множество всех одноэлементных множеств;
4. множество, не имеющее мощности;