

Лекция: Выборки. Размещения, перестановки,  
размещения с повторениями, сочетания,  
сочетания с повторениями, их число. Примеры.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по курсу "Избранные вопросы дискретной математики".  
3-й курс, группа 318,  
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

# Выборки

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  – множество из  $n$  элементов.

Набор элементов  $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ ,  $r \geq 1$ , называется **выборкой объема  $r$  из  $n$  элементов**, или  **$(n, r)$ -выборкой**.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считаются **различными**.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться **повторения** элементов.

# Правило суммы и правило произведения

Как правило, основной вопрос заключается в подсчете числа возможных выборок с определенными свойствами.

Часто при подсчете числа комбинаторных объектов (выборок) применяются два основных приема: **правило суммы** и **правило произведения**.

# Правило суммы

**Правило суммы:** если объект  $A$  может быть выбран  $m$  способами, а объект  $B$  – другими  $n$  способами при условии, что одновременный выбор  $A$  и  $B$  невозможен, то выбор “ $A$  или  $B$ ” можно осуществить  $m + n$  способами.

**Пример 1.** Сколько существует наборов с двумя координатами из множества  $E_2 = \{0, 1\}$ ?

**Решение.** Все наборы с двумя координатами из множества  $E_2$  разобьем на два непересекающихся множества: наборы с первой координатой 0 – множество  $A$  – и наборы с первой координатой 1 – множество  $B$ .

В множестве  $A$  ровно два набора:  $(00), (01)$  ( $m = 2$ ), в множестве  $B$  также два набора:  $(10), (11)$  ( $n = 2$ ).

Следовательно, всего наборов  $m + n = 4$ .

## Правило произведения

**Правило произведения:** если объект  $A$  может быть выбран  $m$  способами, и после каждого из таких выборов объект  $B$  в свою очередь может быть выбран  $n$  способами, то выбор “ $A$  и  $B$ ” в указанном порядке можно осуществить  $m \cdot n$  способами.

**Пример 2.** Сколько существует наборов с двумя координатами из множества  $E_2 = \{0, 1\}$ ?

**Решение.** Все наборы с двумя координатами из множества  $E_2$  обладают двумя признаками: значением первой координаты (признак  $A$ ) и значением второй координаты (признак  $B$ ).

Первая координата может принимать два различных значения: 0 и 1 ( $m = 2$ ), у каждого набора с фиксированной первой координатой вторая координата также может принимать два значения: 0 и 1 ( $n = 2$ ).

Следовательно, всего наборов  $m \cdot n = 4$ .

# Размещения

**Размещением** из  $n$  элементов по  $k$  называется *упорядоченная*  $(n, k)$ -выборка без повторений элементов.

**Пример 3.** Пусть  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Перечислим все размещения из элементов множества  $A$  по 2:  
1, 2; 1, 3; 2, 1; 2, 3; 3, 1; 3, 2.

**Пример 4.** Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.  
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Это задача на подсчет числа размещений.

# Число размещений

Число размещений из  $n$  по  $k$  обозначим как  $P(n, k)$  (встречается также обозначение  $A_n^k$ ).

**Теорема 1.** При  $1 \leq k \leq n$  верно равенство  
$$P(n, k) = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Нам надо подсчитать число размещений из  $n$  по  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Понятно, что если  $k = 1$ , то  $P(n, 1) = n$  (Почему?).

## Число размещений

**Доказательство** (продолжение). При  $k \geq 2$  воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения: значение первой координаты и значение всех остальных координат.

Первая координата может принимать  $n$  различных значений.

При каждой фиксированной первой координате, например, как  $a_i$ , остальные координаты принимают значения всех размещений по  $k - 1$  из множества

$A' = \{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ , которых в точности  $P(n - 1, k - 1)$ .

Получаем рекуррентную формулу  $P(n, k) = n \cdot P(n - 1, k - 1)$  при  $2 \leq k \leq n$ .

Откуда по индукции получаем, что  $P(n, k) = n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ .



## Решение задачи о туристе

Напомним условие задачи.

**Пример 4.** Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.  
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

**Решение.** Воспользуемся формулой из теоремы 1:

$$P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Т.е. можно составить 60 таких маршрутов.

# Убывающий факториал

Число  $n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$  называется **убывающим факториалом** для чисел  $n$  и  $k$  и обозначается как  $(n)_k$ . Т.е.  
 $P(n, k) = (n)_k$ .

Для заданных чисел  $n$  и  $k$  для подсчета значения  $(n)_k$  по формуле требуется выполнить  $(k - 1)$  умножение целых чисел.

Как правило, для увеличения эффективности вычислений строят таблицы значений убывающих факториалов.

# Таблица убывающих факториалов

Для удобства вычислений по определению полагают, что  $(n)_0 = 1$  и  $(n)_k = 0$  при  $0 \leq n < k$ .

По рекуррентному свойству  $(n)_k = n \cdot (n-1)_{k-1}$  строим таблицу убывающих факториалов  $(n)_k$ :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	2				
3	1	3	6	6			
4	1	4	12	24	24		
5	1	5	20	60	120	120	
...							...

Здесь для получения каждого нового значения убывающего факториала выполняется одно умножение целых чисел.

# Перестановки

**Перестановкой**  $n$  элементов называется *упорядоченная*  $(n, n)$ -выборка без повторений элементов.

**Пример 5.** Пусть  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Перечислим все перестановки элементов множества  $A$ :

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1.

**Пример 6.** Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.

Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Это задача на подсчет числа перестановок.

# Число перестановок

Число перестановок  $n$  элементов будем обозначать как  $P(n, n)$  (встречается также обозначение  $P_n$ ).

**Теорема 2.** *Имеет место равенство  $P(n, n) = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ .*

**Доказательство.** Перестановка – это частный случай размещения  $n$  элементов по  $k$  при  $k = n$ .

Поэтому (по теореме 1)  $P(n, n) = (n)_n = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ .

□

# Решение задачи о студентах

Напомним условие задачи.

**Пример 6.** Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.

Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

**Решение.** Воспользуемся формулой из теоремы 2:

$$P(8, 8) = 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 5760.$$

Т.е. практически реализуется один из 5760 возможных вариантов последовательных ответов студентов.

# Факториал

Число  $n(n - 1) \cdot \dots \cdot 1$  называется **факториалом** числа  $n$  и обозначается как  $n!$ .

Значения факториалов  $n!$  расположены на главной диагонали в таблице убывающих факториалов  $(n)_k$ :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	...
0	<b>1</b>						
1	1	<b>1</b>					
2	1	2	<b>2</b>				
3	1	3	6	<b>6</b>			
4	1	4	12	24	<b>24</b>		
5	1	5	20	60	120	<b>120</b>	
...							...

## Размещения с повторениями

**Размещением с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  называется *упорядоченная*  $(n, k)$ -выборка с возможными повторениями элементов.

**Пример 7.** Пусть  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Перечислим все размещения с повторениями по 2 из элементов множества  $A$ :

1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 3, 1; 3, 2; 3, 3.

**Пример 8.** Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Это задача на подсчет числа размещений с повторениями.

## Число размещений с повторениями

Число размещений с повторениями из  $n$  по  $k$  будем обозначать как  $\hat{P}(n, k)$  (встречается также обозначение  $\bar{A}_n^k$ ).

**Теорема 3.** При  $n \geq 1, k \geq 1$  верно равенство  $\hat{P}(n, k) = n^k$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Нам надо подсчитать число размещений с повторениями из  $n$  по  $k, n \geq 1, k \geq 1$ .

Понятно, что если  $k = 1$ , то  $\hat{P}(n, 1) = n$  (Почему?).

## Число размещений с повторениями

**Доказательство** (продолжение). При  $k \geq 2$  воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения с повторениями: значение первой координаты и значение всех остальных координат.

Первая координата может принимать  $n$  различных значений.

При каждой фиксированной первой координате, например, как  $a_i$ , остальные координаты принимают значения всех размещений с повторениями по  $k - 1$  из того же множества  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , которых в точности  $\hat{P}(n, k - 1)$ .

Получаем рекуррентную формулу  $\hat{P}(n, k) = n \cdot \hat{P}(n, k - 1)$  при  $n \geq 1, k \geq 2$ .

Откуда по индукции получаем, что  $\hat{P}(n, k) = n^k$ . □

## Решение задачи о билетах

Напомним условие задачи.

**Пример 8.** Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

**Решение.** Воспользуемся формулой из теоремы 3:

$$\hat{P}(n, k) = 4^3 = 64.$$

Т.е. существует 64 способа распределения билетов между студентами.

# Сочетания

**Сочетанием** из  $n$  элементов по  $k$  называется *неупорядоченная*  $(n, k)$ -выборка без повторений элементов.

**Пример 10.** Пусть  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Перечислим все сочетания из элементов множества  $A$  по 2:  
1, 2; 1, 3; 2, 3.

**Пример 11.** В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.

Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Это задача на подсчет числа сочетаний.

# Число сочетаний

Число сочетаний из  $n$  по  $k$  будем обозначать как  $C(n, k)$  (встречается также обозначение  $C_n^k$ ).

**Теорема 4.** При  $1 \leq k \leq n$  верно равенство  $C(n, k) = \frac{(n)_k}{k!}$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Нам надо подсчитать число сочетаний из  $n$  по  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Рассмотрим все размещения из  $n$  элементов множества  $A$  по  $k$ . Их ровно  $(n)_k$ .

В каждом размещении выбраны какие-то  $k$  элементов из множества  $A$ . Если игнорировать порядок этих выбранных  $k$  элементов, мы получим некоторое сочетание из элементов множества  $A$  по  $k$ .

## Число сочетаний

**Доказательство** (продолжение). Другими словами, размещения с одним и тем же набором выбранных  $k$  элементов задают одно и то же сочетание по  $k$  элементов.

Чем различаются размещения с одним и тем же набором выбранных  $k$  элементов? Только порядком элементов. Число различных перестановок выбранных  $k$  элементов равно  $k!$  (по теореме 2).

Следовательно,  $C(n, k) = \frac{(n)_k}{k!}$ .



# Решение задачи о команде на олимпиаду

Напомним условие задачи.

**Пример 11.** В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.

Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

**Решение.** Воспользуемся формулой из теоремы 4:

$$C(20, 3) = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140.$$

Т.е. существует 1140 возможных команд на олимпиаду по программированию из трех студентов этой группы.

# Бином Ньютона

**Теорема 5 [Формула бинома Ньютона].** При  $n \geq 1$  верно

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^{n-k}y^k.$$

**Доказательство.**  $(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \dots (x + y)}_n$ .

Подсчитаем, сколько раз при перемножении скобок появится слагаемое  $x^{n-k}y^k$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

Выделим  $k$  скобок. Из них выберем множитель  $y$ . Из оставшихся  $n - k$  скобок выберем множитель  $x$ .

Число возможностей выделить  $k$  скобок из всех равно числу сочетаний из  $n$  по  $k$ . Т.е. равно  $C(n, k)$ .

Следовательно, после перемножения скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при слагаемом  $x^{n-k}y^k$  будет равен  $C(n, k)$ .

# Биномиальные коэффициенты

Число  $\frac{\binom{n}{k}}{k!}$  называется **биномиальным коэффициентом** для чисел  $n$  и  $k$  и обозначается как  $C_n^k$ ,  $\binom{n}{k}$  и др.

Для заданных чисел  $n$  и  $k$  для подсчета значения  $C_n^k$  по формуле требуется выполнить  $2(k - 1)$  умножений и одно деление целых чисел.

Как правило, для увеличения эффективности вычислений строят таблицы значений биномиальных коэффициентов.

# Рекуррентная формула для числа сочетаний

**Теорема 6.** При  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n$  верно равенство  
$$C(n, k) = C(n - 1, k) + C(n - 1, k - 1).$$

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ . Нам надо подсчитать число сочетаний из  $n$  по  $k$  при  $1 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 2$ .

Заметим, что если  $k = 1$ , то  $C(n, 1) = n$ .

С другой стороны,  $C(n - 1, 1) = n - 1$ , и, по соглашениям для убывающих факториалов, верно  $C(n - 1, 0) = \frac{(n-1)_0}{0!} = 1$ .

Поэтому,  $C(n, 1) = C(n - 1, 1) + C(n - 1, 0)$ .

## Рекуррентная формула для числа сочетаний

**Доказательство** (продолжение). При  $k \geq 2$  воспользуемся правилом суммы. Разобьем все сочетания на два непересекающиеся множества: сочетания, не содержащие элемент  $a_n$ , и сочетания, содержащие элемент  $a_n$ .

Сочетаний, не содержащих элемент  $a_n$ , в точности  $C(n-1, k)$ , т.к. это все сочетания из элементов множества  $A' = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  по  $k$ .

Сочетаний, содержащих элемент  $a_n$ , в точности  $C(n-1, k-1)$ , т.к. все такие сочетания можно получить, добавив элемент  $a_n$  к каждому из сочетаний из элементов множества  $A' = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  по  $(k-1)$ .

Откуда, по правилу суммы,

$$C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1) \text{ при } 2 \leq k \leq n. \quad \square$$

Несложно проверить, что доказанная в теореме 6 формула верна для всех чисел  $n$  и  $k$  при  $0 \leq k \leq n$ .

# Таблица биномиальных коэффициентов

По свойствам  $C_n^0 = 1$ ,  $C_n^k = 0$  при  $k > n$  и рекуррентному свойству  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$  построим таблицу биномиальных коэффициентов  $C_n^k$  (треугольник Паскаля):

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							...

Здесь для получения каждого нового значения биномиального коэффициента выполняется одно сложение целых чисел.

## Сочетания с повторениями

**Сочетанием с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  называется *неупорядоченная*  $(n, k)$ -выборка с возможными повторениями элементов.

**Пример 12.** Пусть  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Перечислим все сочетания с повторениями из элементов множества  $A$  по 2:

1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 2; 2, 3; 3, 3.

**Пример 13.** На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Это задача на подсчет числа сочетаний с повторениями.

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями из  $n$  по  $k$  обозначается как  $\hat{C}(n, k)$  (встречается также обозначение  $\bar{C}_n^k$ ).

**Теорема 7.** При  $n \geq 1$ ,  $k \geq 1$  верно равенство  
 $\hat{C}(n, k) = C(n + k - 1, k)$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Нам надо подсчитать число сочетаний с повторениями из элементов множества  $A$  по  $k$  при  $n \geq 1$  и  $k \geq 1$ .

## Число сочетаний с повторениями

**Доказательство** (продолжение). Рассмотрим вектор с  $n + k - 1$  координатами из нулей и единиц, в котором ровно  $(n - 1)$  нулей.

Содержательно будем считать нули *разделителями*. Эти  $(n - 1)$  нулей делят вектор на  $n$  кусков.

Будем полагать, что число единиц в  $i$ -м куске – это число элементов  $a_i$  в сочетании с повторением, которое соответствует этому вектору. Понятно, что общее число единиц в векторе равно  $k$ .

Получаем, что каждому сочетанию с повторениями из  $n$  по  $k$  соответствует некоторый вектор из нулей и единиц с  $n + k - 1$  координатами, в котором ровно  $n - 1$  нулей, и наоборот, по каждому такому вектору однозначно восстанавливается сочетание с повторением, ему соответствующее.

## Число сочетаний с повторениями

**Доказательство** (продолжение). Значит, число сочетаний с повторениями из  $n$  по  $k$  совпадает с числом таких векторов.

А сколько таких векторов? Нам надо из  $(n + k - 1)$  координат вектора выбрать  $k$  координат, в которых будут стоять единицы. В остальных координатах будут находиться нули.

Число возможностей выбора – это число сочетаний из  $n + k - 1$  по  $k$ .

Следовательно,  $\hat{C}(n, k) = C(n + k - 1, k)$ .



## Решение задачи об открытках

Напомним условие задачи.

**Пример 13.** На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

**Решение.** Воспользуемся формулой из теоремы 7:

$$\hat{C}(5, 7) = C(5 + 7 - 1, 7) = C(11, 7) = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330.$$

Т.е. существует 330 возможностей составить набор поздравительных открыток в Новому году.

## Задача о билетах в театр

**Пример 14.** Сколькими способами можно распределить три билета в театр между 20 студентами, если

- 1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета;
- 2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов;
- 3) распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета?

# Решение задачи о билетах в театр

## Решение.

1) Пусть распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета.

В этом случае надо выбрать трех студентов, которые получают по одному билету. Т.к. билеты неравноценны, то порядок в выборке важен. Значит, число возможных способов распределений билетов равно числу размещений из 20 по 3, т.е.  $(20)_3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ .

## Решение задачи о билетах в театр

**Решение** (продолжение).

2) Пусть распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов.

Теперь надо выбрать не более трех студентов, которые получают билеты. Т.к. каждый студент может получить более одного билета, имеем дело с выборкой с повторениями. Т.к. билеты неравноценны, то порядок в выборке важен. Значит, число возможных способов распределений билетов равно числу размещений с повторениями из 20 по 3, т.е.  $20^3 = 8000$ .

## Решение задачи о билетах в театр

**Решение** (продолжение).

3) Пусть распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета.

Здесь надо выбрать трех студентов, которые получают по одному билету. Т.к. билеты равноценны, то порядок в выборке не важен. Значит, число возможных способов распределений билетов равно числу сочетаний из 20 по 3, т.е.

$$\binom{20}{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{6840}{6} = 1140.$$

## Еще задача о билетах в театр

### Пример 15.

1. Сколькими способами можно распределить 4 билета в театр среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.
  
2. Сколькими способами можно распределить 2 билета в театр и 2 билета на концерт среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

## Решение второй задачи о билетах в театр

**Решение.** 1) Пусть каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.

В этом случае надо выбрать не более четырех студентов, которые получают билеты. Т.к. билеты *равноценны*, то порядок в выборке *неважен*. Т.к. всего билетов – 4, а каждый студент может получить не более 2-х, возможны такие варианты:

- а) 4 студента получают по 1-му билету ( $C_{20}^4$  вариантов – выбираем 4-х студентов, получающих по билету);
- б) 1 студент получает 2 билета, и еще 2 студента по 1-му билету ( $C_{20}^1 \cdot C_{19}^2$  вариантов – выбираем 1-го студента, получающего 2 билета, и еще 2-х студентов, получающих по 1-му билету);
- в) 2 студента получают по 2 билета ( $C_{20}^2$  вариантов – выбираем 2-х студентов, каждый из которых получает по 2 билета).

По правилу суммы число возможных способов распределений билетов равно  $C_{20}^4 + C_{20}^1 \cdot C_{19}^2 + C_{20}^2$ .

## Решение второй задачи о билетах в театр

**Решение.** 2) Пусть каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

В этом случае надо выбрать **не более** четырех студентов, которые получают билеты. Т.к. билеты *неравноценны*, то порядок в выборке **важен**.

## Решение второй задачи о билетах в театр

**Решение** (продолжение). Сначала будем распределять 2 билета в театр, а потом 2 билета на концерт. Т.к. каждый студент может получить не более 2-х билетов, возможны такие варианты:

- а) 2 студента получают по 1-му билету в театр ( $C_{20}^2$  вариантов); затем либо 2 студента получают по одному билету на концерт ( $C_{20}^2$  вариантов), либо 1 студент получает 2 билета на концерт ( $C_{18}^1$  (почему?));
- б) 1 студент получает 2 билета в театр ( $C_{20}^1$  вариантов); затем либо 2 студента получают по одному билету на концерт ( $C_{19}^2$  вариантов), либо 1 студент получает 2 билета на концерт ( $C_{19}^1$  вариантов).

По правилам суммы и произведения число возможных способов распределений билетов равно

$$C_{20}^2 \cdot (C_{20}^2 + C_{18}^1) + C_{20}^1 \cdot (C_{19}^2 + C_{19}^1).$$

## Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно распределить 4 билета в театр на разные дни среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов?
2. Сколькими способами можно распределить 2 билета в театр и 2 билета на концерт среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, но не может получить билеты на разные мероприятия, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными?
3. Сколькими способами можно представить целое неотрицательное число  $n$  в виде суммы  $k$  целых неотрицательных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными?

## Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII 1.2–1.12.

Конец лекции

## Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$1. (20)_4 + C_4^2 \cdot C_{20}^1 \cdot (19)_2 + C_4^2 \cdot (20)_2.$$

$$2. C_{20}^1 \cdot (C_{19}^1 + C_{19}^2) + C_{20}^2 \cdot (C_{18}^1 + C_{18}^2).$$

$$3. \hat{C}(k, n) = C(k + n - 1, n).$$