Лекция: Выборки. Размещения, перестановки, размещения с повторениями, сочетания, сочетания с повторениями, их число. Примеры.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по курсу “Избранные вопросы дискретной математики”.
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Выборки

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Набор элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, $r \geq 1$, называется **выборкой объема** r **из** n **элементов**, или (n, r)-**выборкой**.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считаются **различными**.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться **повторения** элементов.

Правило суммы и правило произведения

Как правило, основной вопрос заключается в **подсчете** числа возможных выборок с определенными свойствами.

Часто при подсчете числа комбинаторных объектов (выборок) применяются два основных приема: **правило суммы** и **правило произведения**.

Правило суммы

Правило суммы: если объект A может быть выбран m способами, а объект B – другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор "A или B" можно осуществить $m+n$ способами.

Пример 1. Сколько существует наборов с двумя координатами из множества $E_2 = \{0, 1\}$?

Решение. Все наборы с двумя координатами из множества E_2 разобьем на два непересекающихся множества: наборы с первой координатой 0 – множество A – и наборы с первой координатой 1 – множество B.
В множестве A ровно два набора: $(00), (01)$ $(m = 2)$, в множестве B также два набора: $(10), (11)$ $(n = 2)$.
Следовательно, всего наборов $m + n = 4$.

Правило произведения

Правило произведения: если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор "A и B" в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример 2. Сколько существует наборов с двумя координатами из множества $E_2 = \{0, 1\}$?

Решение. Все наборы с двумя координатами из множества E_2 обладают двумя признаками: значением первой координаты (признак A) и значением второй координаты (признак B).
Первая координата может принимать два различных значения: 0 и 1 $(m = 2)$, у каждого набора с фиксированной первой координатой вторая координата также может принимать два значения: 0 и 1 $(n = 2)$.
Следовательно, всего наборов $m \cdot n = 4$.

Размещения

Размещением из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример 3. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.

Перечислим все размещения из элементов множества A по 2:
$1, 2; \;\; 1, 3; \;\; 2, 1; \;\; 2, 3; \;\; 3, 1; \;\; 3, 2.$

Пример 4. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Это задача на подсчет числа размещений.

Число размещений

Число размещений из n по k обозначим как $P(n, k)$ (встречается также обозначение A_n^k).

Теорема 1. *При* $1 \leq k \leq n$ *верно равенство* $P(n, k) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число размещений из n по k, $1 \leq k \leq n$.

Понятно, что если $k = 1$, то $P(n, 1) = n$ (Почему?).

Число размещений

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения: значение первой координаты и значение всех остальных координат.

Первая координата может принимать n различных значений.

При каждой фиксированной первой координате, например, как a_i, остальные координаты принимают значения всех размещений по $k-1$ из множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$, которых в точности $P(n-1, k-1)$.

Получаем рекуррентную формулу $P(n, k) = n \cdot P(n-1, k-1)$ при $2 \leq k \leq n$.

Откуда по индукции получаем, что $P(n, k) = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$. □

Решение задачи о туристе

Напомним условие задачи.

Пример 4. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1:
$P(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Т.е. можно составить 60 таких маршрутов.

Убывающий факториал

Число $n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)$ называется **убывающим факториалом** для чисел n и k и обозначается как $(n)_k$. Т.е. $P(n,k)=(n)_k$.

Для заданных чисел n и k для подсчета значения $(n)_k$ по формуле требуется выполнить $(k-1)$ умножение целых чисел.

Как правило, для увеличения эффективности вычислений строят таблицы значений убывающих факториалов.

Таблица убывающих факториалов

Для удобства вычислений по определению полагают, что $(n)_0 = 1$ и $(n)_k = 0$ при $0 \leq n < k$.
По рекуррентному свойству $(n)_k = n \cdot (n-1)_{k-1}$ строим таблицу убывающих факториалов $(n)_k$:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	2				
3	1	3	6	6			
4	1	4	12	24	24		
5	1	5	20	60	120	120	
$\ldots$							$\ldots$

Здесь для получения каждого нового значения убывающего факториала выполняется одно умножение целых чисел.

Перестановки

Перестановкой n элементов называется *упорядоченная* (n, n)-выборка без повторений элементов.

Пример 5. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все перестановки элементов множества A:
$1, 2, 3;\ \ 1, 3, 2;\ \ 2, 1, 3;\ \ 2, 3, 1;\ \ 3, 1, 2;\ \ 3, 2, 1.$

Пример 6. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Это задача на подсчет числа перестановок.

Число перестановок

Число перестановок n элементов будем обозначать как $P(n, n)$ (встречается также обозначение P_n).

Теорема 2. *Имеет место равенство* $P(n, n) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

Доказательство. Перестановка – это частный случай размещения n элементов по k при $k = n$.

Поэтому (по теореме 1) $P(n, n) = (n)_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

$\square$

Решение задачи о студентах

Напомним условие задачи.

Пример 6. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 2:
$P(8,8) = 8 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 1 = 5760.$
Т.е. практически реализуется один из 5760 возможных вариантов последовательных ответов студентов.

Факториал

Число $n(n-1)\cdot\dots\cdot 1$ называется **факториалом** числа n и обозначается как $n!$.

Значения факториалов $n!$ расположены на главной диагонали в таблице убывающих факториалов $(n)_k$:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	...
0	**1**						
1	1	**1**					
2	1	2	**2**				
3	1	3	6	**6**			
4	1	4	12	24	**24**		
5	1	5	20	60	120	**120**	
...							...

Размещения с повторениями

Размещением с повторениями из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Пример 7. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все размещения с повторениями по 2 из элементов множества A:
$1, 1;\ \ 1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 2;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2;\ \ 3, 3.$

Пример 8. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Это задача на подсчет числа размещений с повторениями.

Число размещений с повторениями

Число размещений с повторениями из n по k будем обозначать как $\hat{P}(n,k)$ (встречается также обозначение $\bar{A}_n^k$).

Теорема 3. *При* $n \geq 1$, $k \geq 1$ *верно равенство* $\hat{P}(n,k) = n^k$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число размещений с повторениями из n по k, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

Понятно, что если $k = 1$, то $\hat{P}(n,1) = n$ (Почему?).

Число размещений с повторениями

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения с повторениями: значение первой координаты и значение всех остальных координат.

Первая координата может принимать n различных значений.

При каждой фиксированной первой координате, например, как a_i, остальные координаты принимают значения всех размещений с повторениями по $k-1$ из того же множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, которых в точности $\hat{P}(n, k-1)$.

Получаем рекуррентную формулу $\hat{P}(n,k) = n \cdot \hat{P}(n, k-1)$ при $n \geq 1$, $k \geq 2$.

Откуда по индукции получаем, что $\hat{P}(n,k) = n^k$. $\square$

Решение задачи о билетах

Напомним условие задачи.

Пример 8. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 3:
$\hat{P}(n, k) = 4^3 = 64.$
Т.е. существует 64 способа распределения билетов между студентами.

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример 10. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания из элементов множества A по 2:
$1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 3.$

Пример 11. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Это задача на подсчет числа сочетаний.

Число сочетаний

Число сочетаний из n по k будем обозначать как $C(n,k)$ (встречается также обозначение C_n^k).

Теорема 4. *При* $1 \le k \le n$ *верно равенство* $C(n,k) = \frac{(n)_k}{k!}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний из n по k, $1 \le k \le n$.

Рассмотрим все размещения из n элементов множества A по k. Их ровно $(n)_k$.

В каждом размещении выбраны какие-то k элементов из множества A. Если игнорировать порядок этих выбранных k элементов, мы получим некоторое сочетание из элементов множества A по k.

Число сочетаний

Доказательство (продолжение). Другими словами, размещения с одним и тем же набором выбранных k элементов задают одно и то же сочетание по k элементов.

Чем различаются размещения с одним и тем же набором выбранных k элементов? Только порядком элементов. Число различных перестановок выбранных k элементов равно $k!$ (по теореме 2).

Следовательно, $C(n, k) = \frac{(n)_k}{k!}$.

$\square$

Решение задачи о команде на олимпиаду

Напомним условие задачи.
Пример 11. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 4:
$C(20,3) = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140.$

Т.е. существует 1140 возможных команд на олимпиаду по программированию из трех студентов этой группы.

Бином Ньютона

Теорема 5 [Формула бинома Ньютона]. *При* $n \geq 1$ *верно* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k$.

Доказательство. $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n}$.

Подсчитаем, сколько раз при перемножении скобок появится слагаемое $x^{n-k}y^k$, $0 \leq k \leq n$.

Выделим k скобок. Из них выберем множитель y. Из оставшихся $n-k$ скобок выберем множитель x.

Число возможностей выделить k скобок из всех равно числу сочетаний из n по k. Т.е. равно $C(n,k)$.

Следовательно, после перемножения скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при слагаемом $x^{n-k}y^k$ будет равен $C(n,k)$.

Биномиальные коэффициенты

Число $\frac{(n)_k}{k!}$ называется **биномиальным коэффициентом** для чисел n и k и обозначается как C_n^k, $\binom{n}{k}$ и др.

Для заданных чисел n и k для подсчета значения C_n^k по формуле требуется выполнить $2(k-1)$ умножений и одно деление целых чисел.

Как правило, для увеличения эффективности вычислений строят таблицы значений биномиальных коэффициентов.

Рекуррентная формула для числа сочетаний

Теорема 6. *При $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$ верно равенство* $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний из n по k при $1 \leq k \leq n$, $n \geq 2$.

Заметим, что если $k = 1$, то $C(n,1) = n$.

С другой стороны, $C(n-1,1) = n-1$, и, по соглашениям для убывающих факториалов, верно $C(n-1,0) = \frac{(n-1)_0}{0!} = 1$.

Поэтому, $C(n,1) = C(n-1,1) + C(n-1,0)$.

Рекуррентная формула для числа сочетаний

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом суммы. Разобьем все сочетания на два непересекающиеся множества: сочетания, не содержащие элемент a_n, и сочетания, содержащие элемент a_n.

Сочетаний, не содержащих элемент a_n, в точности $C(n-1, k)$, т.к. это все сочетания из элементов множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ по k.

Сочетаний, содержащих элемент a_n, в точности $C(n-1, k-1)$, т.к. все такие сочетания можно получить, добавив элемент a_n к каждому из сочетаний из элементов множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ по $(k-1)$.

Откуда, по правилу суммы,
$C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$ при $2 \leq k \leq n$. $\square$
Несложно проверить, что доказанная в теореме 6 формула верна для всех чисел n и k при $0 \leq k \leq n$.

Таблица биномиальных коэффициентов

По свойствам $C_n^0 = 1$, $C_n^k = 0$ при $k > n$ и рекуррентному свойству $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ построим таблицу биномиальных коэффициентов C_n^k (треугольник Паскаля):

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							...

Здесь для получения каждого нового значения биномильного коэффициента выполняется одно сложение целых чисел.

Сочетания с повторениями

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Пример 12. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания с повторениями из элементов множества A по 2:
$1, 1; \;\; 1, 2; \;\; 1, 3; \;\; 2, 2; \;\; 2, 3; \;\; 3, 3.$

Пример 13. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Это задача на подсчет числа сочетаний с повторениями.

Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями из n по k обозначается как $\hat{C}(n,k)$ (встречается также обозначение $\bar{C}_n^k$).

Теорема 7. *При* $n \geq 1$, $k \geq 1$ *верно равенство* $\hat{C}(n,k) = C(n+k-1,k)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний с повторениями из элементов множества A по k при $n \geq 1$ и $k \geq 1$.

Число сочетаний с повторениями

Доказательство (продолжение). Рассмотрим вектор с $n + k - 1$ координатами из нулей и единиц, в котором ровно $(n - 1)$ нулей.

Содержательно будем считать нули *разделителями*. Эти $(n - 1)$ нулей делят вектор на n кусков.

Будем полагать, что число единиц в i-м куске – это число элементов a_i в сочетании с повторением, которое соответствует этому вектору. Понятно, что общее число единиц в векторе равно k.

Получаем, что каждому сочетанию с повторениями из n по k соответствует некоторый вектор из нулей и единиц с $n + k - 1$ координатами, в котром ровно $n - 1$ нулей, и наоборот, по каждому такому вектору однозначно восстанавливается сочетание с повторением, ему соответствующее.

Число сочетаний с повторениями

Доказательство (продолжение). Значит, число сочетаний с повторениеями из n по k совпадает с числом таких векторов.

А сколько таких векторов? Нам надо из $(n + k - 1)$ координат вектора выбрать k координат, в которых будут стоять единицы. В остальных координатах будут находится нули.

Число возможностей выбора – это число сочетаний из $n + k - 1$ по k.

Следовательно, $\hat{C}(n, k) = C(n + k - 1, k)$.

$\square$

Решение задачи об открытках

Напомним условие задачи.
Пример 13. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 7:
$\hat{C}(5,7) = C(5+7-1,7) = C(11,7) = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330.$

Т.е. существует 330 возможностей составить набор поздравительных открыток в Новому году.

Задача о билетах в театр

Пример 14. Сколькими способами можно распределить три билета в театр между 20 студентами, если

1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета;

2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов;

3) распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета?

Решение задачи о билетах в театр

Решение.
1) Пусть распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета.

В этом случае надо выбрать трех студентов, которые получают по одному билету. Т.к. билеты неравноценны, то порядок в выборке важен. Значит, число возможных способов распределений билетов равно числу размещений из 20 по 3, т.е. $(20)_3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Решение задачи о билетах в театр

Решение (продолжение).
2) Пусть распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов.

Теперь надо выбрать не более трех студентов, которые получают билеты. Т.к. каждый студент может получить более одного билета, имеем дело с выборкой с повторениями. Т.к. билеты неравноценны, то порядок в выборке важен. Значит, число возможных способов распределений билетов равно числу размещений с повторениями из 20 по 3, т.е. $20^3 = 8000$.

Решение задачи о билетах в театр

Решение (продолжение).
3) Пусть распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета.

Здесь надо выбрать трех студентов, которые получают по одному билету. Т.к. билеты равноценны, то порядок в выборке не важен. Значит, число возможных способов распределений билетов равно числу сочетаний из 20 по 3, т.е.
$\binom{20}{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{6840}{6} = 1140.$

Еще задача о билетах в театр

Пример 15.

1. Сколькими способами можно распределить 4 билета в театр среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.

2. Сколькими способами можно распределить 2 билета в театр и 2 билета на концерт среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

Решение второй задачи о билетах в театр

Решение. 1) Пусть каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.

В этом случае надо выбрать **не более** четырех студентов, которые получат билеты. Т.к. билеты *равноценны*, то порядок в выборке **неважен**. Т.к. всего билетов – 4, а каждый студент может получить не более 2-х, возможны такие варианты:
а) 4 студента получают по 1-му билету (C_{20}^4 вариантов – выбираем 4-х студентов, получающих по билету);
б) 1 студент получает 2 билета, и еще 2 студента по 1-му билету ($C_{20}^1 \cdot C_{19}^2$ вариантов – выбираем 1-го студента, получающего 2 билета, и еще 2-х студентов, получающих по 1-му билету);
в) 2 студента получают по 2 билета (C_{20}^2 вариантов – выбираем 2-х студентов, каждый из которых получает по 2 билета).

По правилу суммы число возможных способов распределений билетов равно $C_{20}^4 + C_{20}^1 \cdot C_{19}^2 + C_{20}^2$.

Решение второй задачи о билетах в театр

Решение. 2) Пусть каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

В этом случае надо выбрать **не более** четырех студентов, которые получат билеты. Т.к. билеты *неравноценны*, то порядок в выборке **важен**.

Решение второй задачи о билетах в театр

Решение (продолжение). Сначала будем распределять 2 билета в театр, а потом 2 билета на концерт. Т.к. каждый студент может получить не более 2-х билетов, возможны такие варианты:

а) 2 студента получают по 1-му билету в театр (C_{20}^2 вариантов); затем либо 2 студента получают по одному билету на концерт (C_{20}^2 вариантов), либо 1 студент получает 2 билета на концерт (C_{18}^1 (почему?));
б) 1 студент получает 2 билета в театр (C_{20}^1 вариантов); затем либо 2 студента получают по одному билету на концерт (C_{19}^2 вариантов), либо 1 студент получает 2 билета на концерт (C_{19}^1 вариантов).

По правилам суммы и произведения число возможных способов распределений билетов равно
$C_{20}^2 \cdot (C_{20}^2 + C_{18}^1) + C_{20}^1 \cdot (C_{19}^2 + C_{19}^1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно распределить 4 билета в театр на разные дни среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов?

2. Сколькими способами можно распределить 2 билета в театр и 2 билета на концерт среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, но только на одно мероприятие, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными?

3. Сколькими способами можно представить целое неотрицательное число n в виде суммы k целых неотрицательных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными?

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII 1.2–1.12.

Конец лекции