

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 33

Хорновские логические программы:
операционная семантика,
SLD-вычисляемые ответы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Программа \mathcal{P} :

```
elem(X, X.L);  
elem(X, Y.L)  $\leftarrow$  elem(X, L);  
common(X, L1, L2)  $\leftarrow$  elem(X, L1), elem(X, L2);
```

Запрос \mathcal{Q} :

$?common(X, \mathbf{п.о.п.nil}, \mathbf{к.л.о.п.nil})$

Правильными ответами на запрос \mathcal{Q} к программе \mathcal{P} являются подстановки

$\{X/\mathbf{п}\}$

$\{X/\mathbf{о}\}$

А как можно **получить (извлечь, вычислить)** эти ответы?

ХЛП и хорновские дизъюнкты

$\text{elem}(X, X.L); \quad \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$
 $\text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$
 $? \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil})$

Согласно **декларативной семантике**, программа \mathcal{P} представляет собой систему **D-правил**

$$S_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{l} \forall X \forall L \text{ elem}(X, X.L), \quad \forall X \forall L \forall Y (\text{elem}(X, L) \rightarrow \text{elem}(X, Y.L)), \\ \forall X \forall L_1 \forall L_2 (\text{elem}(X, L_1) \& \text{elem}(X, L_2) \rightarrow \text{common}(X, L_1, L_2)) \end{array} \right\},$$

запрос Q представляет собой формулу

$$\Phi_Q = \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil}),$$

и правильность ответа θ означает, что справедливо соотношение

$$S_{\mathcal{P}} \models (\Phi_Q \theta)^{\forall}$$

Формула Φ_Q — это отрицание **D-запроса**:

$$D_Q = \neg \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil}) = \neg \Phi_Q$$

Значит,

$$S_{\mathcal{P}} \models (\Phi_Q \theta)^{\forall} \quad \Leftrightarrow \quad S_{\mathcal{P}} \models (\neg D_Q \theta)^{\forall}$$

ХЛП и хорновские дизъюнкты

$\text{elem}(X, X.L); \quad \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$
 $\text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$
 $? \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil})$

$$S_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{elem}(X, X.L), \quad \text{elem}(X, L) \rightarrow \text{elem}(X, Y.L), \\ \text{elem}(X, L_1) \ \& \ \text{elem}(X, L_2) \rightarrow \text{common}(X, L_1, L_2) \end{array} \right\}$$

$$S_{\mathcal{P}} \models (\Phi_Q \theta)^\forall$$

Способ извлечения требуемой подстановки θ для получившихся системы дизъюнктов-правил и дизъюнкта-запроса был сформулирован в **теореме о входном резольютивном выводе**: достаточно построить входной вывод из $S_{\mathcal{P}} \cup \{D_Q\}$, инициированный дизъюнктом D_Q , и вычислить композицию подстановок этого вывода

Перепишем этот способ в терминах логических программ

ХЛП и хорновские дизъюнкты

Результаты $\mathcal{R}\theta$, $\mathcal{Q}\theta$ применения подстановки θ соответственно к правилу $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ и к запросу $\mathcal{Q} = ?C_1, \dots, C_m$ определим так:

$$\mathcal{R}\theta = A\theta \leftarrow B_1\theta, \dots, B_k\theta;$$

$$\mathcal{Q}\theta = ?C_1\theta, \dots, C_m\theta$$

$\text{Var}_{\mathcal{R}}$ — так обозначим все переменные, содержащиеся в правиле \mathcal{R}

Терминология, относящаяся к применению подстановок к выражениям (вариант, пример, основной пример, основное правило, основной запрос), без изменений переносится с дизъюнктов на правила и запросы

Утверждение

Для любых правил \mathcal{R} , \mathcal{R}' и любой подстановки θ верно:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{R}'} = \Phi_{\mathcal{R}}\theta$$

Утверждение

Для любых запросов \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' и любой подстановки θ верно:

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{Q}'} = \Phi_{\mathcal{Q}}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\neg\mathcal{Q}'} = \Phi_{\neg\mathcal{Q}}\theta$$

Правило SLD-резолюции

Пусть

- ▶ $Q = ?C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_m$ — запрос
- ▶ $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ — правило
- ▶ $\mathcal{R}' = \mathcal{R}\eta$ — вариант правила \mathcal{R} для переименования η , не содержащий ни одной переменной из Q
- ▶ $\theta \in \text{НОУ}(C_i, A\eta)$

Тогда запрос

$$Q' = (?C_1, \dots, C_{i-1}, B_1\eta, \dots, B_k\eta, C_{i+1}, \dots, C_m)\theta$$

называется **SLD-резольвентой** запроса Q и правила \mathcal{R} для подцели C_i и унификатора θ

То, что Q' — SLD-резольвента Q и \mathcal{R} как написано выше, будем обозначать записями

$$Q \xrightarrow{\mathcal{R}\eta, i, \theta} Q' \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} Q \xrightarrow{i, \theta} Q' \\ \mathcal{R}\eta \nearrow \end{array}$$

Правило SLD-резолюции

Примеры

$$\begin{array}{ccc} ?p(X), r(X, f(Y)), r(Y, c) & & ?p(X), r(X, f(Y)), r(Y, c) \\ 2 \downarrow \left\{ \begin{array}{l} r(d, X') \leftarrow p(X'), r(c, Y'); \\ \{X/d, X'/f(Y)\} \end{array} \right. & & 3 \downarrow \left\{ \begin{array}{l} r(d, X') \leftarrow p(X'), r(c, Y'); \\ \{Y/d, X'/c\} \end{array} \right. \\ ?p(d), p(f(Y)), r(c, Y'), r(Y, c) & & ?p(X), r(X, f(d)), p(c), r(c, Y') \end{array}$$
$$\begin{array}{c} ?r(X, X.nil) \\ 1 \downarrow \left\{ \begin{array}{l} r(X'.nil, Y') \leftarrow; \\ \{X/X'.nil, Y'/(X'.nil).nil\} \end{array} \right. \\ \square \end{array}$$

А у запроса $?r(X, X.nil)$ и правила $r(X.nil, X) \leftarrow$; нет SLD-резольвент

Утверждение. Для любых запросов Q и Q' и правила R верно:
 $Q' — \text{SLD-резольвента } Q \text{ и } R \Leftrightarrow \neg\Phi_{Q'} — \text{резольвента } \neg\Phi_Q \text{ и}$
некоторого варианта дизъюнкта Φ_R для того же выбора атомов и
того же унификатора

Правило SLD-резолюции

Немного о названии «SLD-резолюция»:

S = Selective

L = Linear

D = Definite

Но если Вы сейчас попытались представить, что может означать каждое из этих слов, и думаете, что преуспели, то скорее всего это верно лишь отчасти

SLD-резолюция была придумана шотландским математиком Робертом Ковальски в начале далёких 1970-х годов в качестве одной из первых попыток осмыслить логику предикатов как язык программирования

Буквы S, L и D — это ограничения на построение резолютивного вывода в терминах, использовавшихся в те далёкие годы

А сейчас достаточно просто запомнить эти три буквы, воспринимая их как историческое наследие

SLD-резольутивные вычисления

(Частичным) **SLD-резольутивным вычислением** программы \mathcal{P} , порождённым запросом \mathcal{Q} , называется последовательность запросов (конечная или бесконечная) вида

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \dots,$$

где:

- ▶ $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}$
- ▶ \mathcal{R}_i, k_i и $\theta_i, i \in \{1, 2, \dots\}$ — соответственно вариант какого-либо правила из \mathcal{P} , номер подцели и унификатор для резольвенты \mathcal{Q}_{i+1}

По умолчанию в примерах будем использовать вариант \mathcal{R}' правила \mathcal{R} , в котором ко всем переменным правила добавлены штрихи

Вычисление будем называть

- ▶ **успешным**, если оно конечно и оканчивается запросом \square
- ▶ **тупиковым**, если оно конечно, неуспешно и не может быть продолжено до более длинного вычисления

SLD-резольтивные вычисления

Для подстановки θ и множества переменных V записью $\theta|_V$ обозначим **проекцию подстановки** θ на множество V , то есть подстановку, устроенную так:

- ▶ Если $y \in V$, то $\theta|_V(y) = \theta(y)$
- ▶ Иначе $\theta|_V(y) = y$

Результатом конечного вычисления

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_{n-1}, k_{n-1}, \theta_{n-1}} Q_n,$$

а также ответом, **SLD-вычисленным** этим вычислением, будем называть подстановку $\theta_1 \dots \theta_{n-1}|_{\text{Var}_{Q_1}}$

Ответ на запрос Q к программе \mathcal{P} будем называть **SLD-резольтивно вычислимым** (или просто **SLD-вычислимым**), если существует успешное SLD-резольтивное вычисление, результатом которого является этот ответ

SLD-резольютивные вычисления

Примеры SLD-резольютивных вычислений программы \mathcal{P}

$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$

$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$

$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$

$? \text{elem}(X, \mathbf{k.l.o.p.nil})$

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/\mathbf{k}, L'/\mathbf{l.o.p.nil}, X/\mathbf{k}\}$

□

Значит, подстановка $\theta_1|_{\{X\}} = \{X/\mathbf{k}\}$ — SLD-вычислимый ответ на запрос $? \text{elem}(X, \mathbf{k.l.o.p.nil})$ к \mathcal{P}

SLD-резольютивные вычисления

Примеры SLD-резольютивных вычислений программы \mathcal{P}

$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$

$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$

$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$

?elem(X , **к.л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, Y'/\mathbf{к}, L'/\mathbf{л.о.п.nil}\}$

?elem(X , **л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_2 = \{X'/X, Y'/\mathbf{л}, L'/\mathbf{о.п.nil}\}$

?elem(X , **о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_3 = \{X'/\mathbf{о}, L'/\mathbf{п.nil}, X/\mathbf{о}\}$

□

Значит, подстановка $\theta_1\theta_2\theta_3|_{\{X\}} = \{X/\mathbf{о}\}$ — SLD-вычислимый ответ на запрос ?elem(X , **к.л.о.п.nil**) к \mathcal{P}

SLD-резольютивные вычисления

Примеры SLD-резольютивных вычислений программы \mathcal{P}

$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$

$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$

$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$

$? \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, L'_1/\text{п.о.п.nil}, L'_2/\text{к.л.о.п.nil}\}$

$? \text{elem}(X, \text{п.о.п.nil}), \text{elem}(X, \text{к.л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_2, 2 \downarrow \theta_2 = \{X'/X, Y'/\text{к}, L'/\text{л.о.п.nil}\}$

$? \text{elem}(X, \text{п.о.п.nil}), \text{elem}(X, \text{л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_3 = \{X'/X, Y'/\text{п}, L'/\text{о.п.nil}\}$

$? \text{elem}(X, \text{о.п.nil}), \text{elem}(X, \text{л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_4 = \{X'/\text{о}, L'/\text{п.nil}, X/\text{о}\}$

$? \text{elem}(\text{о}, \text{л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_5 = \{X'/\text{о}, Y'/\text{л}, L'/\text{о.п.nil}\}$

$? \text{elem}(\text{о}, \text{о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_6 = \{X'/\text{о}, L'/\text{п.nil}\}$

□

Значит, подстановка $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6|_{\{X\}} = \{X/\text{о}\}$ — SLD-вычислимый ответ на запрос $? \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil})$ к \mathcal{P}

SLD-резольютивные вычисления

Примеры SLD-резольютивных вычислений программы \mathcal{P}

$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$

$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$

$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$

$? \text{common}(X, \mathbf{п.о.п.nil}, \mathbf{к.л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, L'_1/\mathbf{п.о.п.nil}, L'_2/\mathbf{к.л.о.п.nil}\}$

$? \text{elem}(X, \mathbf{п.о.п.nil}), \text{elem}(X, \mathbf{к.л.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_1, 2 \downarrow \theta_2 = \{X'/\mathbf{к}, L'/\mathbf{л.о.п.nil}, X/\mathbf{к}\}$

$? \text{elem}(\mathbf{к}, \mathbf{п.о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_3 = \{X'/\mathbf{к}, Y'/\mathbf{п}, L'/\mathbf{о.п.nil}\}$

$? \text{elem}(\mathbf{к}, \mathbf{о.п.nil})$

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_4 = \{X'/\mathbf{к}, Y'/\mathbf{о}, L'/\mathbf{п.nil}\}$

$? \text{elem}(\mathbf{к}, \mathbf{п.nil})$

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_5 = \{X'/\mathbf{к}, Y'/\mathbf{п}, L'/\mathbf{nil}\}$

$? \text{elem}(\mathbf{к}, \mathbf{nil})$

Это тупиковое вычисление, им не задаётся SLD-вычислимый ответ