Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 33

Хорновские логические программы:
операционная семантика,
SLD-вычислимые ответы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Программа $\mathcal{P}$:

$$\begin{array}{l} \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X}\textbf{.}\mathtt{L}); \\ \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}\textbf{.}\mathtt{L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}); \\ \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2); \end{array}$$

Запрос $\mathcal{Q}$:

$$?\mathrm{common}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}, \textbf{к.л.о.п.nil})$$

Правильными ответами на запрос $\mathcal{Q}$ к программе $\mathcal{P}$ являются подстановки

$$\{\mathtt{X}/\textbf{п}\} \qquad\qquad \{\mathtt{X}/\textbf{о}\}$$

А как можно **получить** (**извлечь**, **вычислить**) эти ответы?

ХЛП и хорновские дизъюнкты

$$\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X.L}); \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y.L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L});$$
$$\mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2);$$
$$?\mathrm{common}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}, \textbf{к.л.о.п.nil})$$

Согласно декларативной семантике, программа $\mathcal{P}$ представляет собой систему D-правил

$$S_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathtt{X}\ \forall \mathtt{L}\ \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X.L}), \quad \forall \mathtt{X}\ \forall \mathtt{L}\ \forall \mathtt{Y}\ (\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}) \to \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y.L})), \\ \forall \mathtt{X}\ \forall \mathtt{L}_1\ \forall \mathtt{L}_2\ (\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1)\ \&\ \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2) \to \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2)) \end{array} \right\},$$

запрос $\mathcal{Q}$ представляет собой формулу

$$\Phi_{\mathcal{Q}} = \mathrm{common}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}, \textbf{к.л.о.п.nil}),$$

и правильность ответа θ означает, что справедливо соотношение

$$S_{\mathcal{P}} \models (\Phi_{\mathcal{Q}}\theta)^{\forall}$$

Формула $\Phi_{\mathcal{Q}}$ — это отрицание D-запроса:

$$D_{\mathcal{Q}} = \neg\mathrm{common}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}, \textbf{к.л.о.п.nil}) = \neg\Phi_{\mathcal{Q}}$$

Значит,

$$S_{\mathcal{P}} \models (\Phi_{\mathcal{Q}}\theta)^{\forall} \quad \Leftrightarrow \quad S_{\mathcal{P}} \models (\neg D_{\mathcal{Q}}\theta)^{\forall}$$

ХЛП и хорновские дизъюнкты

$$\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X.L}); \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y.L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L});$$
$$\mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2);$$
$$?\mathrm{common}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}, \textbf{к.л.о.п.nil})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X.L}), \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}) \rightarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y.L}), \\ \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1) \,\&\, \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2) \rightarrow \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2)) \end{array} \right\}$$

$$S_{\mathcal{P}} \models (\Phi_{\mathcal{Q}}\theta)^{\forall}$$

Способ извлечения требуемой подстановки θ для получившихся системы дизъюнктов-правил и дизъюнкта-запроса был сформулирован в теореме о входном резолютивном выводе: достаточно построить входной вывод из $S_{\mathcal{P}} \cup \{D_{\mathcal{Q}}\}$, инициированный дизъюнктом $D_{\mathcal{Q}}$, и вычислить композицию подстановок этого вывода

Перепишем этот способ в терминах логических программ

ХЛП и хорновские дизъюнкты

Результаты $\mathcal{R}\theta$, $\mathcal{Q}\theta$ применения подстановки θ соответственно к правилу $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ и к запросу $\mathcal{Q} = ?C_1, \dots, C_m$ определим так:

$$\mathcal{R}\theta = A\theta \leftarrow B_1\theta, \dots, B_k\theta;$$
$$\mathcal{Q}\theta = ?C_1\theta, \dots, C_m\theta$$

$\mathrm{Var}_{\mathcal{R}}$ и $\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}}$ — так обозначим все переменные, содержащиеся в правиле $\mathcal{R}$ и в запросе $\mathcal{Q}$

Терминология, относящаяся к применению подстановок к выражениям (вариант, пример, основной пример, основное правило, основной запрос), без изменений переносится с дизъюнктов на правила и запросы

Утверждение

Для любых правил $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ и любой подстановки θ верно:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{R}'} = \Phi_{\mathcal{R}}\theta$$

Утверждение

Для любых запросов $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ и любой подстановки θ верно:

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{Q}'} = \Phi_{\mathcal{Q}}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\neg\mathcal{Q}'} = \Phi_{\neg\mathcal{Q}}\theta$$

Правило SLD-резолюции

Пусть

- $\mathcal{Q} = ?C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_m$ — запрос
- $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k;$ — правило
- $\mathcal{R}' = \mathcal{R}\eta$ — вариант правила $\mathcal{R}$ для переименования η, не содержащий ни одной переменной из $\mathcal{Q}$
- $\theta \in$ НОУ$(C_i, A\eta)$

Тогда запрос

$$\mathcal{Q}' = (?C_1, \dots, C_{i-1}, B_1\eta, \dots B_k\eta, C_{i+1}, \dots, C_m)\theta$$

называется SLD-резольвентой запроса $\mathcal{Q}$ и правила $\mathcal{R}$ для подцели C_i и унификатора θ

То, что $\mathcal{Q}'$ — SLD-резольвента $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ как написано выше, будем обозначать записями

$$\mathcal{Q} \xrightarrow{\mathcal{R}\eta, i, \theta} \mathcal{Q}' \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] \mathcal{Q} \arrow[dr, "{i, \theta}"] & \\ & \mathcal{Q}' \\ \mathcal{R}\eta \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Правило SLD-резолюции

Примеры

$$
\begin{array}{c}
?\mathrm{p}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{X}, \mathbf{f}(\mathtt{Y})), \mathrm{r}(\mathtt{Y}, \mathbf{c}) \\
2 \Big\downarrow \begin{array}{l} \mathrm{r}(\mathbf{d}, \mathtt{X}') \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{X}'), \mathrm{r}(\mathbf{c}, \mathtt{Y}'); \\ \{\mathtt{X}/\mathbf{d}, \mathtt{X}'/\mathbf{f}(\mathtt{Y})\} \end{array} \\
?\mathrm{p}(\mathbf{d}), \mathrm{p}(\mathbf{f}(\mathtt{Y})), \mathrm{r}(\mathbf{c}, \mathtt{Y}'), \mathrm{r}(\mathtt{Y}, \mathbf{c})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
?\mathrm{p}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{X}, \mathbf{f}(\mathtt{Y})), \mathrm{r}(\mathtt{Y}, \mathbf{c}) \\
3 \Big\downarrow \begin{array}{l} \mathrm{r}(\mathbf{d}, \mathtt{X}') \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{X}'), \mathrm{r}(\mathbf{c}, \mathtt{Y}'); \\ \{\mathtt{Y}/\mathbf{d}, \mathtt{X}'/\mathbf{c}\} \end{array} \\
?\mathrm{p}(\mathtt{X}), \mathrm{r}(\mathtt{X}, \mathbf{f}(\mathbf{d})), \mathrm{p}(\mathbf{c}), \mathrm{r}(\mathbf{c}, \mathtt{Y}')
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
?\mathrm{r}(\mathtt{X}, \mathtt{X}.\mathbf{nil}) \\
1 \Big\downarrow \begin{array}{l} \mathrm{r}(\mathtt{X}'.\mathbf{nil}, \mathtt{Y}') \leftarrow; \\ \{\mathtt{X}/\mathtt{X}'.\mathbf{nil}, \mathtt{Y}'/(\mathtt{X}'.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}\} \end{array} \\
\square
\end{array}
$$

А у запроса $?\mathrm{r}(\mathtt{X}, \mathtt{X}.\mathbf{nil})$ и правила $\mathrm{r}(\mathtt{X}.\mathbf{nil}, \mathtt{X}) \leftarrow;$ нет SLD-резольвент

Утверждение. **Для любых запросов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}'$ и правила $\mathcal{R}$ верно: $\mathcal{Q}'$ — SLD-резольвента $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi_{\mathcal{Q}'}$ — резольвента $\neg\Phi_{\mathcal{Q}}$ и некоторого варианта дизъюнкта $\Phi_{\mathcal{R}}$ для того же выбора атомов и того же унификатора**

Правило SLD-резолюции

Немного о названии «SLD-резолюция»:

S = Selective L = Linear D = Definite

Но если Вы сейчас попытались представить, что может означать каждое из этих слов, и думаете, что преуспели, то скорее всего это верно лишь отчасти

SLD-резолюция была придумана шотландским математиком Робертом Ковальски в начале далёких 1970-х годов в качестве одной из первых попыток осмыслить логику предикатов как язык программирования

Буквы S, L и D — это ограничения на построение резолютивного вывода в терминах, использовавшихся в те далёкие годы

А сейчас достаточно просто запомнить эти три буквы, воспринимая их как историческое наследие

SLD-резолютивные вычисления

(Частичным) SLD-резолютивным вычислением программы $\mathcal{P}$, порождённым запросом $\mathcal{Q}$, называется последовательность запросов (конечная или бесконечная) вида

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \dots ,$$

где:

- $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}$
- $\mathcal{R}_i$, k_i и θ_i, $i \in \{1, 2, \dots\}$ — соответственно вариант какого-либо правила из $\mathcal{P}$, номер подцели и унификатор для резольвенты $\mathcal{Q}_{i+1}$

По умолчанию в примерах будем использовать вариант $\mathcal{R}'$ правила $\mathcal{R}$, в котором ко всем переменным правила добавлены штрихи

Вычисление будем называть

- успешным, если оно конечно и оканчивается запросом $\square$
- тупиковым, если оно конечно, неуспешно и не может быть продолжено до более длинного вычисления

SLD-резолютивные вычисления

Для подстановки θ и множества переменных V записью $\theta|_V$ обозначим проекцию подстановки θ на множество V, то есть подстановку, устроенную так:

- Если $\mathrm{y} \in V$, то $\theta|_V(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y})$
- Иначе $\theta|_V(\mathrm{y}) = \mathrm{y}$

Результатом конечного вычисления

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_{n-1}, k_{n-1}, \theta_{n-1}} \mathcal{Q}_n,$$

а также ответом, SLD-вычисленным этим вычислением, будем называть подстановку $\theta_1 \dots \theta_{n-1}|_{\mathsf{Var}_{\mathcal{Q}_1}}$

Ответ на запрос $\mathcal{Q}$ к программе $\mathcal{P}$ будем называть SLD-резолютивно вычислимым (или просто SLD-вычислимым), если существует успешное SLD-резолютивное вычисление, результатом которого является этот ответ

SLD-резолютивные вычисления

Примеры SLD-резолютивных вычислений программы $\mathcal{P}$

$$\mathcal{R}_1 : \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X.L});$$
$$\mathcal{R}_2 : \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y.L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L});$$
$$\mathcal{R}_3 : \quad \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2);$$

$$?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{к.л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_1', 1 \downarrow \theta_1 = \{\mathtt{X}'/\textbf{к}, \mathtt{L}'/\textbf{л.о.п.nil}, \mathtt{X}/\textbf{к}\}$$
$$\square$$

Значит, подстановка $\theta_1|_{\{\mathtt{X}\}} = \{\mathtt{X}/\textbf{к}\}$ — SLD-вычислимый ответ на запрос $?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{к.л.о.п.nil})$ к $\mathcal{P}$

SLD-резолютивные вычисления

Примеры SLD-резолютивных вычислений программы $\mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &: \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X}\textbf{.}\mathtt{L});\\
\mathcal{R}_2 &: \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}\textbf{.}\mathtt{L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L});\\
\mathcal{R}_3 &: \quad \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{к.л.о.п.nil})\\
\quad \mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_1 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}'/\textbf{к}, \mathtt{L}'/\textbf{л.о.п.nil}\}\\
?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{л.о.п.nil})\\
\quad \mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_2 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}'/\textbf{л}, \mathtt{L}'/\textbf{о.п.nil}\}\\
?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{о.п.nil})\\
\quad \mathcal{R}_1', 1 \downarrow \theta_3 = \{\mathtt{X}'/\textbf{о}, \mathtt{L}'/\textbf{п.nil}, \mathtt{X}/\textbf{о}\}\\
\quad \square
\end{array}
$$

Значит, подстановка $\theta_1\theta_2\theta_3|_{\{\mathtt{X}\}} = \{\mathtt{X}/\textbf{о}\}$ — SLD-вычислимый ответ на запрос $?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{к.л.о.п.nil})$ к $\mathcal{P}$

SLD-резолютивные вычисления

Примеры SLD-резолютивных вычислений программы $\mathcal{P}$

$$\mathcal{R}_1: \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X}\boldsymbol{.}\mathtt{L});$$
$$\mathcal{R}_2: \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}\boldsymbol{.}\mathtt{L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L});$$
$$\mathcal{R}_3: \quad \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2);$$

$$?\mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathbf{п.о.п.nil}, \mathbf{к.л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_3', 1 \downarrow \theta_1 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{L}_1'/\mathbf{п.о.п.nil}, \mathtt{L}_2'/\mathbf{к.л.о.п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathbf{п.о.п.nil}), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathbf{к.л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_2', 2 \downarrow \theta_2 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}'/\mathbf{к}, \mathtt{L}'/\mathbf{л.о.п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathbf{п.о.п.nil}), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathbf{л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_3 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{Y}'/\mathbf{п}, \mathtt{L}'/\mathbf{о.п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathbf{о.п.nil}), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathbf{л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_1', 1 \downarrow \theta_4 = \{\mathtt{X}'/\mathbf{о}, \mathtt{L}'/\mathbf{п.nil}, \mathtt{X}/\mathbf{о}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\mathbf{о}, \mathbf{л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_5 = \{\mathtt{X}'/\mathbf{о}, \mathtt{Y}'/\mathbf{л}, \mathtt{L}'/\mathbf{о.п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\mathbf{о}, \mathbf{о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_1', 1 \downarrow \theta_6 = \{\mathtt{X}'/\mathbf{о}, \mathtt{L}'/\mathbf{п.nil}\}$$
$$\square$$

Значит, подстановка $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6|_{\{\mathtt{X}\}} = \{\mathtt{X}/\mathbf{о}\}$ — SLD-вычислимый ответ на запрос $?\mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathbf{п.о.п.nil}, \mathbf{к.л.о.п.nil})$ к $\mathcal{P}$

SLD-резолютивные вычисления

Примеры SLD-резолютивных вычислений программы $\mathcal{P}$

$$\mathcal{R}_1 : \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{X.L});$$
$$\mathcal{R}_2 : \quad \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{Y.L}) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L});$$
$$\mathcal{R}_3 : \quad \mathrm{common}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2) \leftarrow \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_1), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \mathtt{L}_2);$$

$$?\mathrm{common}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}, \textbf{к.л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_3', 1 \downarrow \theta_1 = \{\mathtt{X}'/\mathtt{X}, \mathtt{L}_1'/\textbf{п.о.п.nil}, \mathtt{L}_2'/\textbf{к.л.о.п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{п.о.п.nil}), \mathrm{elem}(\mathtt{X}, \textbf{к.л.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_1', 2 \downarrow \theta_2 = \{\mathtt{X}'/\textbf{к}, \mathtt{L}'/\textbf{л.о.п.nil}, \mathtt{X}/\textbf{к}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\textbf{к}, \textbf{п.о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_3 = \{\mathtt{X}'/\textbf{к}, \mathtt{Y}'/\textbf{п}, \mathtt{L}'/\textbf{о.п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\textbf{к}, \textbf{о.п.nil})$$
$$\mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_4 = \{\mathtt{X}'/\textbf{к}, \mathtt{Y}'/\textbf{о}, \mathtt{L}'/\textbf{п.nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\textbf{к}, \textbf{п.nil})$$
$$\mathcal{R}_2', 1 \downarrow \theta_5 = \{\mathtt{X}'/\textbf{к}, \mathtt{Y}'/\textbf{п}, \mathtt{L}'/\textbf{nil}\}$$
$$?\mathrm{elem}(\textbf{к}, \textbf{nil})$$

Это тупиковое вычисление, им не задаётся SLD-вычислимый ответ